This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

SCIENCE CENTER LIBRARY

Math 5158.72.3

Bought with
the gift of
Uriah A. Boyden,
of Boston.

24 April, 1873.

ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE

DES SYSTÈMES PONCTUELS

ET TANGENTIELS

DE SECTIONS CONIQUES.

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS,
Quai des Augustins, 55.

ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE

DES

SYSTÈMES PONCTUELS

ET TANGENTIELS

DE SECTIONS CONIQUES,

PAR

H. PICQUET,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
CAPITAINE DU GÉNIE.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

1872

5158.72.3
Math ~~5208.72~~

1873, April 24.
Boyden Fund.

TABLE DES MATIÈRES.

I. Théorie de l'involution plane..... 1

II. Des systèmes ponctuels..... 9

III. Des systèmes tangentiels..... 39

IV. Propriétés générales des coniques en involution. Cas particuliers..... 57

V. Examen des cinq cas dans lesquels deux systèmes peuvent être contravariants..... 89

PRÉFACE.

C'est à la suite de recherches sur les surfaces du second degré que nous avons commencé le travail que nous publions aujourd'hui. La théorie géométrique de ces surfaces, que nous élaborons depuis six ans, et que nous espérons produire un jour, non-seulement trouve son point de départ dans celle des sections coniques, mais encore l'invoque à chaque pas; cependant, celle-ci nous ayant manqué une fois contre notre attente, nous avons été conduit, pour essayer de remédier à ce défaut, à aborder le sujet traité dans cet Ouvrage.

Malheureusement les auteurs étrangers sont trop négligés en France, et l'on s'attache peu à y répandre leurs travaux à l'égal des nôtres. Que ce soit là notre excuse, si nous nous sommes aperçu seulement quand nous étions au bout de notre tâche que quelques-uns de nos résultats, absolument inconnus en France, étaient depuis longtemps connus à l'étranger : nous

avons cité les auteurs. C'est grâce aux communications obligeantes de M. Cremona, professeur si apprécié du public savant, que nous en avons eu connaissance : c'est lui qui nous a mis en relation avec M. Smith, professeur de Géométrie à l'Université d'Oxford, et nous nous plaisons ici à les remercier tous les deux du bienveillant intérêt dont nous avons été l'objet de leur part.

ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE
DES SYSTÈMES PONCTUELS
ET TANGENTIELS
DE SECTIONS CONIQUES.

CHAPITRE PREMIER.

THÉORIE DE L'INVOLUTION PLANE.

---

1. Nous dirons que *des points* conjugués trois à trois *sont en involution plane* lorsqu'ils sont les sommets de triangles conjugués à une même conique. Si, au lieu de considérer les sommets de ces triangles, nous en considérons les côtés, également conjugués trois à trois, nous dirons encore que *ces droites sont en involution plane*. Suivant que la conique qui détermine ainsi l'involution sera un cercle, une ellipse,... nous dirons que l'involution est *circulaire, elliptique*....

Ces définitions admises, nous allons étudier les propriétés de l'involution plane et ses analogies avec l'involution linéaire. Nous étudierons plus spécialement le cas où l'involution est circulaire, qui est celui où ces analogies sont le plus remarquables.

2. Nous ne discuterons pas les différents cas particuliers qui peuvent se présenter dans la position du triangle;

ils résultent de la théorie des sections coniques; nous les énoncerons seulement :

1° Un sommet peut être à l'infini; alors les deux autres sont sur un diamètre, et le divisent harmoniquement;

2° Un côté peut être à l'infini; alors le sommet opposé est le centre de la courbe et les deux autres côtés en sont deux diamètres conjugués;

3° Un sommet peut être sur la courbe; alors un second sommet se confond avec lui sur la tangente en ce point, et le troisième est un point quelconque de cette droite, par exemple le point de contact; de sorte que la conique peut être considérée comme le lieu des points doubles ou des points triples de l'involution. Nous l'appellerons, pour cette raison, la *conique triple de l'involution.*

Lorsque deux sommets du triangle sont confondus sur la conique, deux côtés sont aussi confondus et sont la tangente en ce point, le troisième est la polaire du troisième sommet qui est sur la tangente. Si ce point est aussi le point de contact, on voit que la tangente forme à elle seule les trois côtés. De sorte que, lorsque des droites sont en involution plane, la conique triple est également l'enveloppe des droites doubles ou des droites triples de l'involution.

Deux coniques ayant généralement un triangle conjugué commun et un seul, il en résulte que deux involutions planes ont généralement un triangle commun. Les cas d'exceptions sont celui où les deux coniques triples ont un point de contact, alors deux côtés du triangle conjugué commun se confondent avec la tangente en ce point; et celui où elles sont doublement tangentes, alors il y a une infinité de triangles conjugués communs, constitués par la corde de contact et par deux droites coujuguées passant par le pôle de cette droite : comme cas particulier de ce dernier, les coniques peuvent être concentriques et avoir les mêmes directions asymptotiques.

Enfin une involution plane est évidemment projective;

car une conique et un triangle conjugué ont pour perspective une conique et un triangle conjugué.

3. Nous avons ainsi retrouvé les propriétés analogues à toutes les propriétés descriptives de l'involution linéaire, centre, points doubles, segment commun à deux involutions, projectivité; il ne manque que celle qui est relative au *sommet* de l'involution, d'où l'on voit tous les segments sous un angle droit. Nous allons rencontrer la propriété analogue dans l'involution plane circulaire; mais, de même que dans l'involution linéaire les points doubles doivent être imaginaires pour que le sommet soit réel, il faudra ici que le cercle triple soit imaginaire.

On sait en effet que, si du point de rencontre des hauteurs d'un triangle comme centre, on décrit un cercle dont le carré du rayon soit égal au produit des deux segments de chaque hauteur comptés à partir de ce point, produit constant pour chaque hauteur et positif ou négatif suivant que le point de rencontre des hauteurs est extérieur ou intérieur au triangle, on sait que le triangle est conjugué par rapport à ce cercle.

Nous donnerons à la racine carrée de ce produit le nom de *puissance du triangle;* suivant l'un ou l'autre cas, algébriquement parlant, elle sera réelle ou imaginaire; mais il nous arrivera souvent, dans le second cas, de lui restituer son caractère de longueur géométrique, et de ne pas tenir compte des signes des segments. Quoi qu'il en soit, on peut énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Tous les triangles qui ont même point de rencontre des hauteurs et même puissance algébrique forment une involution plane dont la conique triple est un cercle réel ou imaginaire, suivant que le point de rencontre des hauteurs est extérieur ou intérieur à ces triangles. Il a ce point pour centre et la puissance algébrique pour rayon.*

D'ailleurs il est facile de faire voir que, lorsqu'un

trièdre trirectangle est coupé par un plan suivant un triangle, le sommet se projette à l'intérieur du triangle suivant le point de rencontre des hauteurs, et la longueur de la projetante est égale à la puissance géométrique du triangle. Il en résulte que, si l'on considère une involution plane circulaire imaginaire, et qu'au centre de l'involution on élève à son plan une perpendiculaire égale à la puissance géométrique de tous les triangles de l'involution, de l'extrémité de cette perpendiculaire on verra tous ces triangles sous un angle trièdre trirectangle.

4. C'est ce système de triangles, conjugués à un même cercle, que M. Poudra a considéré le premier sous le nom d'*involution plane* (1), et il a dit que sa perpective était aussi une involution plane, dans le sens qu'il attachait à ce mot, ce qui paraît faux, puisque le cercle imaginaire par rapport auquel ils sont tous conjugués a pour perspective une ellipse imaginaire, et que tous ces triangles ne peuvent être à la fois conjugués par rapport à un cercle et par rapport à une ellipse. Voici probablement la cause de son erreur : si l'on prend le sommet de l'involution pour point de vue, tous les trièdres, étant trirectangles, se projetteront sur un plan quelconque suivant des triangles ayant même point de rencontre des hauteurs et même puissance, par conséquent suivant une involution plane circulaire imaginaire; c'est qu'alors le cône qui projette le cercle imaginaire, étant coupé par un plan quelconque suivant un cercle, sera une sphère réduite à son centre, ce qu'on vérifie d'ailleurs en voyant que le centre du cercle d'intersection de ce cône avec un plan quelconque est le pied de la perpendiculaire p abaissée du point fixe sur ce plan, et que son rayon, qui est égal, pour une sphère de rayon R, à $\sqrt{R^2 - p^2}$, est ici égal à $\sqrt{-p^2}$.

(1) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. III, p. 498. — CHASLES, *Rapport sur les progrès de la Géométrie*, p. 308; 1870.

5. Il est encore une propriété de l'involution linéaire, relative au sommet de l'involution, qui trouve son analogue dans l'involution plane. Dans la première, en effet, tous les cercles décrits sur les segments comme diamètres ont même axe radical. Dans la seconde, si l'on circonscrit un cercle à un triangle quelconque de l'involution, les sphères ayant ces cercles pour grands cercles ont même axe radical, et cela quelle que soit la conique triple.

C'est ce qui résulte en effet d'un théorème connu, savoir : *La puissance du centre d'une conique par rapport à un cercle circonscrit à un triangle conjugué est égale à la somme des carrés des demi-axes* (1).

Si la conique est réelle, son centre est toujours extérieur à un triangle conjugué, et les sphères ne se couperont pas, de même que, dans l'involution linéaire à points doubles réels, les cercles correspondants ne se coupent pas. Mais, si la conique est une ellipse imaginaire, les sphères se couperont en deux points symétriques par rapport au plan de l'involution, se projetant suivant son centre réel, et la longueur de la projetante sera $\sqrt{a^2+b^2}$, $a\sqrt{-1}$ et $b\sqrt{-1}$ étant les demi-axes de l'ellipse. Néanmoins, dans le cas où $a = b = R$, ces points ainsi déterminés diffèrent complétement du sommet précédemment déterminé (3), puisque leur projetante est $R\sqrt{2}$ et que celle du sommet est égale à R.

6. Nous allons traiter maintenant les différents problèmes que l'on peut se proposer sur l'involution plane.

Si la conique triple est donnée, l'involution sera déterminée et l'on pourra construire un triangle quelconque de l'involution facilement. Sinon, l'involution sera déterminée toutes les fois que l'on connaîtra cinq éléments de la conique

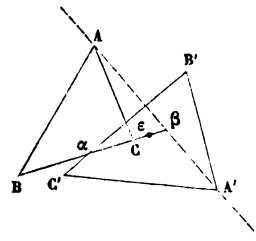
(1) FAURE, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. XIX, p. 234. — M. P. Serret donne également une démonstration géométrique de ce théorème (*Géométrie de direction*, p. 217).

triple, par exemple, si l'involution doit être circulaire et qu'on en connaisse un triangle. Si l'involution doit être quelconque, deux triangles la détermineront, mais leurs six sommets devront être sur une même conique, comme on le sait [1].

Problème. — *Construire la conique triple d'une involution déterminée par deux triangles.*

On peut dans ce cas-là se proposer de construire la conique triple. Soient ABC, A'B'C' (*fig.* 1), les deux trian-

Fig. 1.



gles donnés. Le point α est évidemment le pôle de la droite AA'; donc les points α et β sont conjugués par rapport à la conique cherchée; elle passe donc par les points doubles de l'involution linéaire, déterminée sur la droite BC par les deux segments BC, $\alpha\beta$. Le problème est donc ramené au problème analogue de l'involution linéaire, et l'on pourrait d'ailleurs facilement en construire le centre, car le triangle $A\alpha\beta$ étant conjugué par rapport à la conique, le centre radical des cercles circonscrits aux triangles ABC, A'B'C', $A\alpha\beta$ est précisément le centre de la conique, d'après le théorème énoncé plus haut, et la longueur de la tangente menée de ce point à ces cercles est égale à $\sqrt{a^2+b^2}$.

Ou bien encore d'après cette propriété : Étant donnés deux points et leurs polaires, si par chacun de ces points on mène une parallèle à la polaire de l'autre, la droite qui

[1] Chasles, *Traité des Sections coniques*, p. 140.

passe par leur point de rencontre et celui des droites données passe aussi par le centre de la courbe [1].

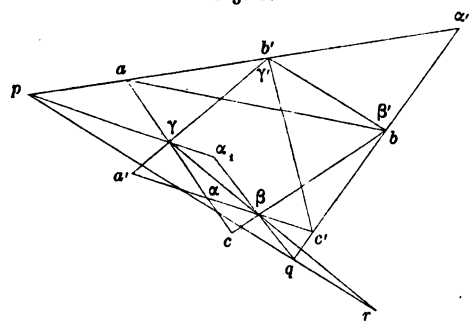
Si plusieurs triangles conjugués ont un côté commun, leurs sommets forment sur ce côté une involution linéaire dont les points doubles sont ceux où il rencontre la conique; d'ailleurs, dans ce cas, les cercles circonscrits ont même axe radical. Il en résulte ce théorème :

THÉORÈME. — *Si l'on construit une série de cercles ayant même axe radical, lequel passe par le centre d'une conique, et tels que la puissance algébrique de ce centre par rapport à l'un quelconque d'entre eux soit égale à* $\sqrt{a^2+b^2}$, *la polaire d'un de leurs points communs par rapport à la conique déterminera sur ces cercles une involution linéaire dont les points doubles sont les points d'intersection de cette droite avec la conique.*

7. PROBLÈME. — *Construire un triangle d'une involution plane déterminée par deux triangles.*

On peut y arriver sans construire la conique triple : car, soient abc, $a'b'c'$ (*fig.* 2) les deux triangles donnés; il est

Fig. 2.



facile, au moyen de ces deux triangles, d'en déterminer deux autres réciproquement conjugués par rapport à la conique cherchée, c'est-à-dire tels que la polaire d'un sommet

[1] P. SERRET, *Géométrie de direction*, p. 185.

de l'un d'eux soit le côté homologue de l'autre; par exemple, les triangles $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$, comme il est aisé de le vérifier dans la figure; et, d'après un théorème connu, ces triangles sont homologiques. Soient donc α_1 un sommet du triangle cherché, β'_1 et γ'_1 les points d'intersection du côté opposé avec $\alpha'\gamma'$ et $\alpha'\beta'$; par le même théorème les triangles $\alpha_1\beta\gamma$ et $\alpha'\beta'_1\gamma'_1$ seront homologiques, ce qui permettra de déterminer un point de la droite $\beta'_1\gamma'_1$, polaire du point α_1, par rapport à la conique triple. Il suffira de joindre $\alpha_1\gamma$, qui rencontre $\alpha'\gamma'$ en p, $\alpha_1\beta$ qui rencontre $\alpha'\beta'$ en q, la droite pq rencontrera $\beta\gamma$ au point r, qui est un point de la droite cherchée; on pourrait de même en déterminer un second, au moyen du triangle $\alpha_1\alpha\beta$ et de son homologique; on aura ainsi le côté opposé au sommet α_1 choisi arbitrairement.

Sur ce côté, les deux autres sommets ne sont pas déterminés, ils forment une involution linéaire que l'on pourra déterminer au moyen de la construction suivante, tout à fait analogue à celle de l'involution linéaire.

On construira immédiatement, comme plus haut (6), un troisième triangle $A\alpha\beta$ de l'involution; les sphères ayant pour grands cercles les cercles circonscrits à ces triangles auront même axe radical (5), et toutes les sphères de leur série qui passeront par le sommet choisi α_1 couperont le plan de l'involution suivant une série de cercles ayant même axe radical et déterminant sur la droite précédemment construite l'involution linéaire cherchée, dont deux points conjugués quelconques seront les deux autres sommets du triangle. Dans le plan, la construction se ramènera à la suivante : on décrira le cercle orthogonal commun aux trois cercles circonscrits, et tous les cercles passant par le point α_1 et orthogonaux à ce dernier donneront chacun sur la polaire du point α_1 deux points répondant à la question.

CHAPITRE II.

DES SYSTÈMES PONCTUELS.

8. La théorie de l'involution plane, très-féconde en elle-même, le sera surtout par une autre théorie à laquelle elle va nous conduire, celle des coniques en involution. Mais, avant de l'aborder, il est nécessaire d'étudier certaines propriétés de ces courbes.

D'une façon générale, on appelle *système de coniques* [1] l'ensemble de plusieurs coniques satisfaisant à des conditions communes et définies dans chaque cas suivant la nature du système. Il y a les systèmes *ponctuels* et les systèmes *tangentiels*. Nous allons nous occuper d'abord des premiers. D'ailleurs, toutes les fois que nous ne désignerons pas la nature du système, c'est qu'il s'agira d'un système ponctuel.

DU SYSTÈME PONCTUEL DU PREMIER ORDRE, OU FAISCEAU PONCTUEL.

Équation générale en coordonnées ordinaires :

$$\lambda C + \mu C' = 0.$$

9. On entend, par *système ponctuel du premier ordre,* ou simplement par *faisceau ponctuel,* l'ensemble des coniques qui ont quatre points communs. La propriété caractéristique d'un faisceau résulte du théorème de De-

[1] Smith, *Proceedings of the London mathematical Society*, n° 14, p. 90.

sargues-Sturm, d'après lequel ces courbes sont coupées par une même droite suivant un système de points en involution linéaire. Ces courbes ont donc sur une droite quelconque un système de deux point conjugués communs, qui sont les points doubles de l'involution linéaire correspondante. Ces courbes satisfaisant à quatre conditions, on peut se demander si, réciproquement, toutes les coniques qui ont quatre couples de points conjugués communs ont quatre points communs, et par suite une infinité de couples de points conjugués communs. C'est en effet ce qui a lieu [1] : car, si nous considérons deux coniques C et C′ parmi celles qui admettent les quatre couples donnés, nous voyons d'abord que toutes les coniques du faisceau [C. C′] [2] les admettront également. De plus il n'y en aura pas d'autre; car, s'il y en avait une C″, toutes les coniques des faisceaux en nombre infini déterminés par la conique C″ et chacune des coniques du faisceau [C. C′], coniques dont l'indétermination est d'un ordre supérieur au premier, admettraient également les quatre couples donnés, ce qui ne saurait avoir lieu, à moins que ces quatre couples ne soient pas distincts, c'est-à-dire que trois d'entre eux n'entraînent le quatrième, cas sur lequel nous reviendrons (19).

10. De quatre couples de points conjugués, on peut donc en conclure une infinité, qui, en somme, ne forment que quatre couples distincts. Nous verrons également (19) comment on peut en déduire une infinité au moyen de trois couples distincts. Énonçons enfin le théorème suivant, qui indique le cas où trois couples ne sont pas distincts et comment on peut déduire l'un des deux autres :

Théorème. — *Lorsqu'une conique divise harmonique-*

---

(1) On trouve une autre démonstration de cette propriété par M. de Jonquières (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. XIV, p. 439).

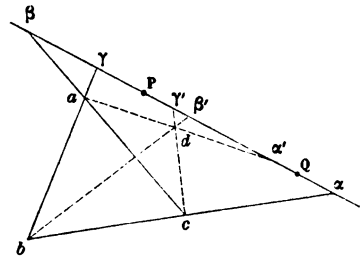
(2) Le faisceau [C.C′] signifie le faisceau déterminé par les courbes C et C′. La conique P [C.C′] signifie la conique du faisceau [C.C′] qui passe par le point P.

ment les deux diagonales d'un quadrilatère, elle divise aussi harmoniquement la droite qui joint les points de concours des côtés opposés (¹).

En d'autres termes, de deux couples P_1Q_1 et P_2Q_2 résulte un troisième couple fourni par le point d'intersection des droites P_1Q_2 et P_2Q_1 et celui des droites P_1P_2 et Q_1Q_2.

11. Toutes les coniques qui passent par trois points pouvant être considérées comme ayant trois couples de points conjugués communs respectivement sur chacun des trois côtés du triangle des trois points, il en résulte que toutes les coniques qui passent par trois points et qui ont un système de points conjugués communs peuvent être considérées comme ayant quatre couples de points conjugués communs, et par suite passent par un quatrième point. Il est facile à déterminer : car soient a, b, c les trois points donnés (*fig.* 3)

Fig. 3.



et P, Q les points conjugués communs; le système des coniques considérées formant un faisceau, il suffit, pour avoir le quatrième point d, de trouver celles d'entre elles qui se réduisent à deux droites; or, si la droite ac coupe en β la droite PQ et qu'on détermine le point β' conjugué de β par rapport aux points P et Q, il est évident que le système des droites ac, $b\beta'$ répond à la question; on aura de même les

(¹) Hesse, *De curvis et superficiebus secundi ordinis* (*Journal de Crelle*, t. XX, p. 301; 1840).

systèmes ab, $c\gamma'$ et bc, $a\alpha'$, et les trois droites $a\alpha'$, $b\beta'$, $c\gamma'$ passeront par un même point d, qui est le quatrième point cherché. On retrouve donc ainsi les théorèmes suivants.

Théorème. — *Étant donnés un triangle et une involution linéaire, les trois droites qui joignent un sommet du triangle au point de l'involution conjugué de celui par où passe le côté opposé concourent en un même point.*

Théorème. — *Ce point est commun à toutes les coniques circonscrites au triangle et conjuguées par rapport aux points doubles de l'involution.*

Corollaire. — Si les points P et Q sont les points circulaires de l'infini, la conique devient une hyperbole équilatère, le point d devient le point de rencontre des hauteurs du triangle abc et les énoncés deviennent :

Théorème. — *Les trois hauteurs d'un triangle se coupent en un même point.*

Théorème. — *Toutes les hyperboles équilatères circonscrites à un triangle passent par le point de rencontre des hauteurs.*

12. Problème. — *Construire une conique, connaissant quatre points et un système de points conjugués.*

1° Si les quatre points sont donnés par l'intersection de deux coniques C et C′, la droite sur laquelle se trouvent les deux points conjugués coupera la conique cherchée suivant les deux points conjugués communs à deux involutions linéaires, dont l'une est déterminée sur la droite par toutes les courbes du faisceau [C.C′], et dont l'autre a pour points doubles les points conjugués donnés; dans ce cas, la construction est quadratique;

2° Si les quatre points sont donnés directement, au moyen des deux points conjugués et de trois quelconques des quatre points donnés, on construira un cinquième point de la conique (11); ici, elle est linéaire [1].

---

[1] M. de Jonquières résout le même problème (*Nouvelles Annales de*

Problème. — *Construire une conique, connaissant trois points et deux couples de points conjugués.*

Au moyen des trois points donnés et de chaque couple de points conjugués, on construira successivement un quatrième et un cinquième point de la conique (11). La construction est linéaire.

13. Deux points pouvant être déterminés par la condition d'être conjugués dans deux involutions données, il en résulte que toutes les coniques qui passent par deux points peuvent être regardées comme ayant deux couples de points conjugués communs sur la droite qui joint ces deux points; donc, toutes les coniques qui passent par deux points et qui ont deux couples de points conjugués communs peuvent être regardées comme ayant quatre couples de points conjugués communs et conséquemment ont deux autres points communs (9). On peut facilement les obtenir par une construction quadratique; car si l'on se donne un troisième point C d'une de ces courbes sur la droite où se trouve l'un des couples de points conjugués, on en conclura un quatrième point D sur cette droite, et l'on pourra en construire un cinquième point au moyen de ces deux points, des deux points donnés A et B et du second couple (11). En changeant le point C sur la droite CD, on construira de la même façon une conique qui coupera la première en A et B, et aux deux points cherchés. On peut donc dire que :

Théorème. — *Toutes les coniques qui ont deux points communs et deux couples de points conjugués communs passent par deux autres points fixes* [1].

Mathématiques, t. XIV, p. 435) dans le second cas, où les quatre points sont donnés directement, en construisant le faisceau déterminé par ces quatre points, ce qui rentre dans le premier cas. Il substitue ainsi une solution quadratique à une solution linéaire.

[1] M. de Jonquières démontre également cette propriété (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. XIV, p. 438).

14. Problème. — *Construire une conique, connaissant deux points et trois couples de points conjugués.*

Pour cela, on construira d'abord, ainsi qu'il vient d'être dit, deux des coniques passant par les deux points donnés, et admettant deux des couples donnés. Elles détermineront un faisceau dans lequel on construira la conique qui admet le troisième couple (12); la construction est quadratique [1].

15. Toujours par la même raison, toutes les coniques qui passent par un point et qui ont trois couples de points conjugués communs, ont trois autres points communs. Leur détermination est évidemment un problème cubique et on peut le résoudre par l'intersection de deux coniques dont on connaît un point. Il suffira, pour cela, de construire deux de ces coniques, par exemple celle qui passe par le point d'intersection de deux des droites qui renferment les couples donnés; il en résultera deux points, ce qui fera quatre; enfin le troisième couple et trois de ces points en fourniront un cinquième (11). On en construira de même une seconde; ces deux courbes auront un point commun A connu, les trois autres seront les trois points cherchés.

16. Problème. — *Construire une conique connaissant un point et quatre couples de points conjugués.*

Il suffira de construire deux coniques passant par le point donné et admettant trois des couples donnés, en s'en donnant un second point qui soit à l'intersection des droites qui renferment deux des couples donnés; on en connaîtra cinq points, comme nous venons de le voir (15), au moyen du troisième couple. Ces courbes détermineront un faisceau dans lequel on obtiendra quadratiquement la conique qui admet le quatrième couple (12).

Problème. — *Construire une conique connaissant cinq couples de points conjugués.*

---

[1] Ce problème est également résolu (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. XIV, p. 436).

On construira une conique admettant quatre des couples donnés, en s'en donnant un point à l'intersection des droites qui renferment deux des couples donnés. Il en résultera deux autres points, puis un quatrième au moyen du troisième couple (11), et un cinquième au moyen du quatrième couple (11); on construira de même une seconde conique qui admette ces quatre couples; ces deux courbes détermineront un faisceau dans lequel on obtiendra quadratiquement la conique qui admet le cinquième couple (12) [1].

Pour faire voir combien cette solution est simple, soient $P_1Q_1, \ldots, P_5Q_5$ les cinq couples donnés; si l'on considère la conique C qui admet les quatre premiers, et qui passe par le point A d'intersection des droites P_1Q_1 et P_2Q_2, elle passe par les points A_1 et A_2, conjugués de A par rapport à P_1Q_1 et à P_2Q_2; ces trois points et le couple P_3Q_3 en donnent un quatrième A_3 (11), le couple P_4Q_4 un cinquième. On a donc immédiatement cinq points de cette conique, de même pour la seconde; on cherchera leurs points d'intersection par la droite P_5Q_5, et on en conclura immédiatement ceux de cette droite et de la conique cherchée. On connaîtra alors deux points de cette courbe et un faisceau auquel elle appartient.

17. Nous appellerons *condition ponctuelle* toute condition telle que quatre quelconques d'entre elles déterminent un faisceau ponctuel, c'est-à-dire toutes les coniques qui ont quatre points communs.

Nous voyons donc que, un point, un couple de points conjugués sont des conditions ponctuelles, et nous avons résolu, au moyen de la règle et du compas, tous les problèmes dans lesquels on peut se proposer de construire une conique connaissant cinq de ces conditions. Nous verrons

---

[1] On trouve une autre solution de ce problème par M. de Jonquières (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. XIV, p. 438).

plus loin (69) qu'il en existe d'autres, et en particulier quelle est la condition ponctuelle la plus générale.

Mais il peut se faire que ces conditions, au lieu d'être données directement, le soient par la connaissance d'un certain nombre de coniques, satisfaisant à plusieurs d'entre elles; dans ce cas, la solution des problèmes précédents est différente et également simple. Pour y arriver, nous allons étudier les propriétés des systèmes de coniques, que l'on peut définir par trois, quatre ou cinq de ces courbes; ces propriétés nous seront d'une utilité analogue à celles du théorème de Desargues, qui permet de construire une conique déterminée par cinq points, dont quatre sont connus implicitement, comme étant communs à deux coniques déterminées. Toutefois, avant d'abandonner l'étude du faisceau, nous remarquerons :

1° Que, tous les cercles ayant deux points communs à l'infini, l'ensemble des cercles qui ont deux points communs à distance finie constitue un cas particulier du faisceau;

2° Qu'en général aucun cercle ne fait partie d'un faisceau donné; ce cas particulier peut se présenter, mais, s'il y en a deux, toutes les courbes du faisceau sont des cercles;

3° Qu'en général un faisceau admet une hyperbole équilatère, et que, s'il y en a deux, toutes les courbes du faisceau sont des hyperboles équilatères, parce qu'une pareille courbe admet pour couple de points conjugués les points circulaires de l'infini.

DU SYSTÈME PONCTUEL DU SECOND ORDRE, OU RÉSEAU PONCTUEL.

Équation générale en coordonnées ordinaires :

$$\lambda C + \mu C' + \nu C'' = 0.$$

18. Étant données trois coniques, C, C′, C″, on sait que si l'on fait passer par un point P trois autres coniques pas-

sant respectivement par les points d'intersection de ces coniques prises deux à deux, ces trois nouvelles courbes ont trois autres points communs, et appartiennent ainsi à un même faisceau [1]. L'ensemble de toutes les coniques que l'on peut ainsi construire, au moyen des trois coniques données, en faisant varier le point P d'une façon quelconque dans le plan, constitue un *système ponctuel du second ordre*, ou, plus simplement, un *réseau ponctuel*. On voit que toutes les courbes d'un réseau satisfont à trois conditions; car, si l'on s'en donne un point, on obtient un faisceau dont toutes les courbes appartiennent évidemment au réseau, et dans lequel on peut encore déterminer une conique par un point. Nous allons faire voir : 1° que toutes les coniques qui admettent trois couples de points conjugués communs forment un réseau; 2° réciproquement, que toutes les coniques d'un réseau admettent une infinité de couples de points conjugués communs, mais non distincts, et déterminés lorsqu'on en connaît trois.

Soient, en effet, P_1Q_1, P_2Q_2, et P_3Q_3 les trois couples donnés, on pourra construire une conique répondant à la question, en s'en donnant un point A sur la droite P_1Q_1, d'où l'on conclura un point B sur cette droite, un point A′ sur P_2Q_2, qui donnera un point B′, et l'on sait d'ailleurs construire la conique C, passant par les points A, B, A′, B′, et conjuguée au couple P_3Q_3 (**12**); on pourra construire de la même façon deux autres coniques C′ et C″ admettant également les trois premier couples, et l'on pourra toujours faire en sorte que ces trois coniques n'appartiennent pas à un faisceau; il suffira de prendre les deux points arbitraires qui définissent la conique C″ ailleurs que sur une conique du faisceau [C. C′]. Cela posé, il est évident que si l'on construit une conique quelconque du réseau [C. C′. C″], elle admettra les mêmes trois couples de points conjugués; car,

[1] Chasles, *Traité des Sections coniques*, p. 276.

soit P un point de cette conique; elle appartiendra, d'après la définition du réseau, au faisceau [P[C.C′], P[C′.C″]] et admettra, par conséquent, les mêmes couples de points conjugués que les coniques P[C.C′] et P[C′.C″], lesquelles admettent toutes deux les trois couples donnés. D'ailleurs, si une conique étrangère au réseau admettait aussi les trois couples donnés, toutes les coniques des faisceaux en nombre infini déterminés par cette courbe et chacune des coniques du réseau [C.C′.C″], coniques dont l'indétermination est d'un ordre supérieur au second, admettraient également les trois couples donnés, ce qui ne saurait avoir lieu, à moins que ces trois couples ne constituent pas trois conditions distinctes, cas sur lequel nous reviendrons (**27**). Donc :

Théorème. — *Toutes les coniques qui admettent trois couples distincts de points conjugués communs forment un réseau.*

19. Considérons maintenant toutes les coniques d'un réseau, et cherchons à quelle condition doit satisfaire une droite pour les couper suivant une involution linéaire, c'est-à-dire pour renfermer deux couples de points conjugués à toutes les coniques du réseau. On peut n'en considérer que trois, C, C′, C″; pour qu'une droite les coupe suivant six points en involution, il suffit évidemment qu'elle coupe la conique C suivant deux points situés sur une conique du faisceau [C′.C″], ce qui n'assujettit cette droite qu'à une condition, et prouve qu'il en existe une infinité. L'indétermination de ces droites est du premier ordre; elles enveloppent donc une certaine courbe qu'il est facile de construire par tangentes, lorsqu'on en connaît trois, ainsi que les couples situés sur elles. C'est en effet ce qui doit avoir lieu : puisque les courbes d'un réseau satisfont à trois conditions, il faut que tous les couples de points conjugués communs résultent de trois d'entre eux, et c'est ce qui va nous donner en même temps le moyen de savoir lorsque quatre couples de points conjugués ne sont pas dis-

tincts. Prenons un point P sur la conique C : la conique du faisceau [C′.C″] qui passe par ce point la coupe en trois autres points A, B, C; les droites PA, PB, PC répondent évidemment à la question, on pourra donc, de chaque point du plan, mener trois tangentes à la courbe considérée, lesquelles sont les trois droites qui joignent ce point aux trois autres points par où passent aussi toutes les coniques du réseau [C.C′.C″], qui passent par le premier. Cette courbe est donc de la troisième classe, et c'est la courbe générale de cette classe, puisqu'elle est définie par la connaissance de trois tangentes et de deux points particuliers sur chacune d'elles, ce qui fait bien les neuf conditions nécessaires pour la déterminer. Nous désignerons désormais cette courbe sous le nom de *Cayleyenne* (¹) du réseau.

Pour examiner les choses de plus près, nous allons supposer connus les trois couples de points conjugués communs, et nous verrons qu'en effet il est facile de déterminer linéairement une infinité d'autres couples de points également conjugués par rapport à toutes les coniques conjuguées aux trois premiers. Soient P_1Q_1, P_2Q_2, P_3Q_3 les trois couples donnés (*Pl. I*), situés respectivement sur les côtés d'un triangle ABC. Puisque de chaque point du plan on peut mener trois tangentes à la Cayleyenne, on peut se se proposer de chercher la troisième tangente issue du point A. Elle est facile à déterminer; car toutes les coniques du réseau qui passent par le point A passeront aussi par les points A_2 et A_3, conjugués harmoniques de A par rapport aux couples P_2Q_2 et P_3Q_3. Étant de plus conjuguées

(¹) Du nom de l'auteur qui en a démontré analytiquement les propriétés [Cayley, *A Memoir on curves of the thrid order* (*Philosophical Transactions*, partie II; London, 1857, p. 415-446)]. Nous ne faisons que nous conformer à une dénomination déjà adoptée (Cremona, *Introduzione ad una teoria geometrica delle curve plane;* Bologne, 1862). Dans cet ouvrage, M. Cremona démontre géométriquement les propriétés de la Cayleyenne d'un réseau ponctuel, comme conséquences de théorèmes généraux sur les courbes.

par rapport au couple P_1Q_1, elles passeront par un quatrième point que l'on peut construire (11). Il suffit pour cela de chercher les trois points α_1, B_1, C_1, conjugués harmoniques par rapport au couple P_1Q_1 des points α, B, C, où les côtés du triangle AA_2A_3 rencontrent la droite P_1Q_1; les trois droites $A\alpha_1$, A_2B_1, et A_3C_1 passeront par un même point a qui est le point cherché, et la troisième tangente, issue du point A, est la droite Aa qui est la même que $A\alpha_1$; on déterminerait de même les tangentes $B\beta_1$ et $C\gamma_1$, ainsi que les points b et c, analogues de a, situés respectivement sur ces deux tangentes, et la figure montre bien que les trois tangentes issues du point A sont les trois droites qui joignent ce point aux points a, A_2, A_3 par où passent toutes les coniques du réseau qui passent par le point A.

On voit aussi qu'il suffit, pour construire cette troisième tangente, de joindre les conjugués harmoniques du sommet considéré sur les deux côtés du triangle dont il est l'intersection, de prendre le point d'intersection de la droite ainsi obtenue avec le troisième côté, et de joindre le sommet choisi au point conjugué harmonique de ce point sur ce troisième côté.

Nous avons ainsi six tangentes de la courbe, mais il est facile d'en trouver six autres sur la figure. En effet les tangentes issues d'un point P étant les trois droites qui joignent ce point aux trois autres sommets du faisceau défini dans le réseau par le point P, il en résulte que, dans chacun des faisceaux dont l'ensemble constitue le réseau, les trois systèmes de deux droites qui sont des coniques de ce faisceau sont six tangentes de la Cayleyenne; en un mot, que tous les systèmes de deux droites, qui sont des coniques du réseau que nous étudions, sont des tangentes de cette courbe, qui de son côté en est l'enveloppe; d'où ce théorème :

Théorème. — *Les dix-huit cordes communes à trois coniques quelconques, prises deux à deux, sont tangentes à une même courbe de la troisième classe.*

A chacune des tangentes de la Cayleyenne en correspond donc une seconde, qui forme avec elle une conique du réseau, et ce système de deux droites est conséquemment conjugué par rapport à tous les couples situés respectivement sur chaque tangente, c'est-à-dire que l'on peut énoncer sur cette courbe le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Si l'on prend sur chaque tangente à la Cayleyenne le point conjugué harmonique, par rapport aux deux points conjugués situés sur elle, du point où elle est rencontrée par une tangente fixe, tous ces points sont en ligne droite sur une seconde tangente, formant avec la première une conique du réseau.*

Par conséquent, pour construire la tangente qui résulte ainsi d'une tangente connue, il suffit de joindre les points conjugués harmoniques des points où elle rencontre deux autres tangentes également connues ; d'où l'on conclut que la droite B_1A_2 forme avec la droite AB une conique du réseau et est tangente à la courbe ; de même pour les droites B_3C_2 et C_1A_3 avec les droites BC et CA. Il est également facile de voir que les trois tangentes précédemment déterminées $A\alpha_1$, $B\beta_1$ et $C\gamma_1$ ont respectivement pour tangentes correspondantes les droites A_2A_3, B_1B_3 et C_1C_2. Nous avons ainsi douze tangentes de la courbe, accouplées par deux, et on pourrait en construire, par le même procédé, une infinité d'autres. La courbe est donc bien déterminée par les trois tangentes données, et, pour construire sur chacune d'elles les deux points conjugués, il suffit de construire les points doubles de l'involution linéaire déterminée sur cette droite par tous les systèmes des deux droites formant coniques du réseau.

Le théorème énoncé plus haut est l'expression des dépendances qui existent entre toutes les tangentes de la courbe remarquable qui nous occupe. C'est lui qui permet de reconnaître si quatre couples de points conjugués donnés sont distincts (10) ; il faut pour cela que l'une des droites

sur lesquelles ils sont situés rencontre les trois autres en trois points tels, que si l'on prend respectivement leurs conjugués harmoniques sur la droite correspondante, ces trois nouveaux points ne soient pas en ligne droite. Dans le cas contraire, ces quatre couples de points conjugués ne sont pas distincts, et déterminent une courbe de la troisième classe du genre de la précédente; par suite, les coniques correspondantes forment un réseau au lieu d'un faisceau.

De ce qui précède, résulte une démonstration géométrique du théorème de Hesse (10). En effet on voit d'abord que, quel que soit le couple P_1Q_1, la droite A_2A_3 est tangente à la Cayleyenne; reste à faire voir que les points conjugués situés sur elle sont les sommets opposés du quadrilatère $P_2Q_2P_3Q_3$, dont elle est la diagonale. En effet les couples de points AA_3, BB_3 appartiennent à l'involution dont les points doubles sont P_3 et Q_3; de même AA_2, CC_2 à celle dont les points doubles sont P_2 et Q_2; les droites P_2Q_2 et P_3Q_3 se coupent en un point A qui se correspond à lui-même dans les deux involutions; donc l'une de ces involutions est la perspective de l'autre, et le point de vue est le point α commun aux droites A_2A_3, CB, C_2B_3; donc les droites P_2P_3 et Q_2Q_3, qui projettent les points doubles, se coupent en α sur A_2A_3. Mais nous verrons (97) que le point α fait partie du lieu des couples de points conjugués, comme étant le sommet d'un couple [BC, B_3C_3]; l'autre, étant son conjugué harmonique par rapport à A_2 et A_3, où la droite A_2A_3 rencontre le couple [A_2B_1, A_3B], est l'autre extrémité de la diagonale.

20. Il existe également des dépendances entre tous les couples de points conjugués situés sur les tangentes de la Cayleyenne, abstraction faite de ces droites, sur lesquelles ils sont répartis par couples. On sait en effet que, lorsque deux points sont conjugués par rapport à un cercle, le cercle ayant pour diamètre le segment de droite formé par ces deux points coupe le premier orthogonalement. Or il

existe toujours un cercle parmi les coniques du réseau, puisque leur indétermination est du second ordre, et un seul, parce qu'il est déterminé par cinq conditions ponctuelles (17); il en résulte que les cercles ayant pour diamètres les segments de droites formés par tous les couples de points conjugués coupent orthogonalement le cercle du réseau, et, par suite, ont même centre radical. Ce cercle est donc immédiatement déterminé ; c'est le cercle orthogonal à trois cercles donnés. Si les quatre cercles résultant de quatre couples de points avaient même centre radical, cela prouverait ou que les quatre couples ne sont pas distincts, ou qu'ils déterminent un faisceau dont une conique est un cercle, ce qui n'a généralement pas lieu (17).

21. Enfin, une hyperbole équilatère étant conjuguée par rapport aux points circulaires de l'infini, il en résulte que toutes les hyperboles équilatères d'un réseau ont quatre couples de points conjugués communs, et, par suite, quatre points communs (9). D'où ce théorème :

Théorème. — *Si par les points d'intersection de trois coniques prises deux à deux, on fait passer trois hyperboles équilatères, ces trois courbes ont quatre points communs.*

Si cependant les milieux des trois couples de points conjugués, qui peuvent définir un réseau, étaient en ligne droite, ce qui prouverait que la droite de l'infini est tangente à la Cayleyenne du réseau; si de plus les points conjugués situés sur cette droite étaient les points circulaires de l'infini, ces deux points formeraient avec les trois premiers couples un système de quatre couples non distincts (19), c'est-à-dire que toutes les courbes du réseau seraient des hyperboles équilatères. Il suffit pour cela qu'il y ait dans le réseau trois hyperboles équilatères qui n'aient pas quatre points communs.

Si les deux points conjugués sur la droite de l'infini ne sont pas les points circulaires de l'infini, mais deux points

quelconques, le cercle du réseau, passant forcément par les points circulaires de l'infini, passera aussi par leurs points conjugués harmoniques par rapport à ces deux points, c'est-à-dire qu'il se composera de la droite à l'infini et d'une autre droite à distance finie, celle qui joint les milieux des couples des points conjugués. C'est ce qui arrive aussi dans le premier cas considéré; mais cela ne donne lieu à aucune difficulté : car ces deux droites, pouvant être considérées comme perpendiculaires, constituent aussi bien une hyperbole équilatère qu'un cercle.

Enfin, si ces deux points sont dans deux directions perpendiculaires, c'est-à-dire conjugués par rapport aux points circulaires de l'infini, tous les cercles, ayant même axe radical, qui coupent orthogonalement deux des trois cercles ayant pour diamètres les segments déterminés par les trois couples de points conjugués font partie du réseau, et ces trois cercles ont eux-mêmes même axe radical.

22. Problème. — *Construire dans un réseau le faisceau déterminé par un point.*

Il suffit de construire deux des trois coniques passant par ce point et les points d'intersection des trois coniques qui définissent le réseau, prises deux à deux (18).

Problème. — *Construire dans un réseau le faisceau déterminé par un système de deux points conjugués.*

Il suffit de faire passer par les points d'intersection des trois coniques qui définissent le réseau, prises deux à deux, deux coniques admettant ce système de points conjugués (12). Il est évident qu'elles admettront également les trois couples de points conjugués du réseau, et conséquemment auront quatre points communs.

23. Ces deux problèmes conduisent, sans plus de détails, à la solution des trois suivants :

Construire une conique d'un réseau connaissant :

1° *Deux points;*

2° *Un point et un système de points conjugués;*

3° *Deux systèmes de points conjugués.*

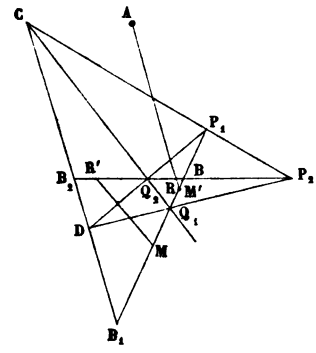
La solution du premier de ces trois problèmes ne serait pas applicable au cas où les deux points seraient imaginaires. Mais s'ils sont imaginaires conjugués, on pourra remplacer leur connaissance par deux couples réels de points conjugués par rapport à ces deux points. Ainsi, pour construire le cercle d'un réseau défini par trois coniques, il suffira de se donner deux couples de points conjugués à l'infini dans des directions rectangulaires, ce qui donnera lieu au troisième des problèmes précédents. Toutes ces constructions sont quadratiques.

24. *Cas particuliers du réseau.* — Toutes les coniques qui ont deux couples de points conjugués communs et qui passent par un point fixe peuvent être considérées comme ayant trois couples de points conjugués communs, le troisième couple étant pris sur une droite quelconque passant par le point fixe, et l'involution linéaire correspondante ayant ses points doubles confondus.

Il en résulte que ce système de courbes constitue un cas particulier du réseau; parmi les trois tangentes issues d'un point quelconque du plan à la Cayleyenne, se trouve évidemment la droite qui joint ce point au point fixe; cette courbe se compose donc de ce point et d'une conique, puisque de chaque point du plan on peut mener deux tangentes à la seconde partie de la courbe. Il est facile d'ailleurs de trouver cinq tangentes de cette conique. Il y a d'abord les deux droites qui renferment les deux couples donnés P_1Q_1 et P_2Q_2; de plus, si l'on applique la construction donnée plus haut de la troisième tangente issue d'un point donné (**19**), on voit que, pour avoir la seconde tangente menée à cette conique par un point quelconque M (*fig.* 4) de l'une de ces droites, il suffit de prendre le point M′, conjugué harmonique du point M par rapport au couple P_1Q_1, situé sur cette droite, de le joindre au point fixe A par une droite qui rencontre la droite P_2Q_2 en un point R, dont on pren-

dra le conjugué harmonique R′ par rapport au couple P_2Q_2, enfin de joindre MR′. Si l'on applique cette construction au point B_2, conjugué harmonique du point d'intersection des

Fig. 4.



deux droites données par rapport au couple P_2Q_2, on voit que, quel que soit le point A, elle fournit la droite B_1B_2 qui joint le point B_2 au point B_1, conjugué harmonique du point B par rapport au couple P_1Q_1, laquelle n'est autre que la diagonale CD du quadrilatère $P_1Q_1P_2Q_2$, ce qui est une conséquence directe du théorème de Hesse (10). Cette droite est donc tangente à la conique. De plus il résulte de cette construction que les tangentes issues du point A rencontrent chacune des droites P_1Q_1, P_2Q_2, en deux points conjugués harmoniques par rapport au couple situé sur chacune d'elles; c'est-à-dire que ce sont les rayons doubles du faisceau en involution linéaire, dont deux couples de rayons conjugués sont AP_1, AQ_1 et AP_2, AQ_2. Cette conique est donc parfaitement définie, et les couples de points conjugués situés sur chaque tangente s'obtiendront facilement, puisque les droites AB, B_1B_2 constituent une conique du réseau, ainsi que AB_1, BB_2 et AB_2, BB_1.

Ainsi, à chaque droite passant par le point A, correspond une tangente à la conique, formant avec elle conique du

réseau; de plus le rapport anharmonique de quatre des premières est égal à celui des points d'intersection des quatre tangentes correspondantes avec une cinquième tangente quelconque; car, si l'on prend pour cette tangente la droite P_1Q_1, les quatre premières la coupent en quatre points et les quatre tangentes correspondantes en quatre autres qui sont respectivement leurs conjugués harmoniques par rapport au couple P_1Q_1, et ces deux systèmes de quatre points ont même rapport anharmonique. Donc :

Théorème. — *Étant données deux involutions linéaires sur deux droites différentes et un point, si une droite tourne autour du point, la droite qui joint les points conjugués de ceux où elle rencontre chaque involution enveloppe une conique que l'on sait construire, et le rapport anharmonique de quatre droites passant par le point fixe est égal à celui des quatre points d'intersection des quatre tangentes correspondantes avec une cinquième tangente quelconque.*

On peut encore dire : *Si une conique est tangente aux trois diagonales d'un quadrilatère et aux rayons doubles du faisceau en involution linéaire, dont deux couples de rayons conjugués sont les droites qui joignent un point fixe aux sommets opposés du quadrilatère, à chaque droite passant par le point fixe correspond une tangente de la conique, qui avec elle coupe harmoniquement les trois diagonales, et le rapport anharmonique, etc.*

Le cercle du réseau sera le cercle passant par le point A et coupant orthogonalement les deux cercles ayant pour diamètres P_1Q_1 et P_2Q_2; il se réduira à une droite quand la conique sera une parabole, ou quand le point A sera à l'infini, avec les mêmes restrictions que dans le cas général. Enfin le théorème général énoncé plus haut (19) devient:

Théorème. — *Étant données trois coniques quelconques ayant un point commun, elles ont deux à deux dix-huit cordes communes, dont neuf passent par le point*

commun; les neuf autres sont tangentes à une même conique.

25. Un second cas particulier du réseau est celui où toutes les coniques qui le constituent ont deux points communs A et B. La Cayleyenne se compose donc d'abord de ces deux points; car toute droite passant par l'un d'eux coupe le réseau suivant une involution linéaire, dont les points doubles sont confondus. Deux des trois tangentes issues d'un point quelconque P sont donc les deux droites PA et PB; d'où il suit que le reste de la courbe est une courbe telle, que d'un point quelconque du plan on ne peut lui mener qu'une tangente, c'est-à-dire également un point; reste à déterminer ce point. Nous allons faire voir que c'est le point Q commun aux trois cordes communes, ne passant pas par les deux points A et B des trois coniques considérées deux à deux qui déterminent le réseau. Soient en effet C, C′, C″ ces trois coniques; considérées deux à deux, elles ont neuf systèmes de deux cordes communes qui forment coniques du réseau (19), et qui sont tangentes à la courbe cherchée; donc celles de ces cordes qui ne passent pas par les deux points A et B passent par le troisième point cherché, lequel est conséquemment le point Q; ce qui prouve ce que nous avions avancé, et pourrait au besoin servir de démonstration au théorème relatif à ces cordes communes. Il en résulte qu'une droite quelconque passant par ce point coupe toutes les courbes du réseau suivant une involution linéaire, à points doubles distincts cette fois, et dans laquelle le point Q et le point d'intersection de cette droite avec la droite AB sont conjugués; car ce sont les points d'intersection de la droite avec la conique du réseau formée de la droite AB et d'une droite arbitraire passant par le point Q.

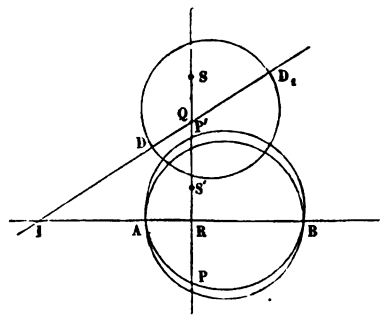
Le réseau peut être défini par trois coniques ou par les deux points A et B et un système de points conjugués DD_1; dans le premier cas, on en conclura facilement le système

DD_1, si l'on connaît les deux points A et B, au moyen d'une droite quelconque passant par le point Q; et, dans le second, on construira le point Q, conjugué harmonique par rapport à D et D_1 du point d'intersection des droites AB, DD_1. Le cercle du réseau sera, dans tous les cas, le cercle qui passe par les points A et B, et qui coupe orthogonalement le cercle décrit sur DD_1 comme diamètre, et pourra du reste toujours se réduire à une droite ou n'être pas seul de son espèce (21).

Toutes les hyperboles équilatères du réseau ont, outre les points A et B, deux autres points communs S et S′, situés sur la perpendiculaire abaissée du point Q sur la droite AB, puisque l'ensemble de ces deux droites en constitue une. On peut les construire facilement.

En effet, puisque ces courbes appartiennent au réseau, ils font d'abord partie d'une involution linéaire dont deux couples de points conjugués sont les points Q, R (*fig.* 5),

Fig. 5.



et les points P, P′ où la droite QR rencontre le cercle du réseau; de plus, devant former avec les points A et B les trois sommets et le point de rencontre des hauteurs d'un triangle, ils sont conjugués par rapport au cercle décrit sur AB comme diamètre; ils sont donc les extrémités du segment commun à deux involutions linéaires déterminées. Il suffira, pour les obtenir, de faire passer un cercle quelconque par les points Q et R, et par ses points d'intersec-

tion avec le cercle du réseau, un cercle qui coupe orthogonalement le cercle ayant AB pour diamètre.

On peut encore les obtenir, moins simplement, c'est vrai, par un autre raisonnement qui donne lieu à quelques conséquences. Cherchons à construire le point d'intersection des droites AS, BS′ et celui des droites AS′, BS; d'abord ils sont sur le cercle ayant AB pour diamètre, puisque S′ est le point de rencontre des hauteurs du triangle ABS; de plus ces deux couples de droites formant coniques du réseau rencontrent la droite DD_1 en deux couples de points conjugués à D et à D_1. Si donc l'on joint le point A aux points de l'involution linéaire dont les points doubles sont D et D_1 et le point B à leurs conjugués, on aura deux faisceaux homographiques, dont le lieu des points d'intersection des rayons homologues est une conique sur laquelle se trouvent les deux points cherchés. Elle passe par les points A et B; on peut donc construire sa seconde corde commune avec le cercle décrit sur AB comme diamètre. Mais elle passe aussi par les points D et D_1, et cela, quelle que soit la droite DD_1 passant par le point Q; donc le lieu des points doubles des involutions linéaires déterminées dans le réseau par toutes les droites passant par le point Q est une conique qui passe par les points A et B.

Si trois coniques du réseau sont des hyperboles équilatères, il en est de même des autres; et, comme elles ont une corde commune AB, elles ont aussi deux à deux une autre corde commune perpendiculaire à AB, et le point Q est alors à l'infini dans cette direction; c'est-à-dire que :

Théorème. — *Lorsque trois hyperboles équilatères ont deux points communs, toute droite perpendiculaire à la corde commune les coupe suivant six points en involution.*

Nous verrons plus loin (107) que le lieu des points doubles est alors le cercle décrit sur AB comme diamètre.

Si les points A et B sont les points circulaires de l'infini,

le réseau est l'ensemble des cercles qui coupent orthogonalement un même cercle; la conique, lieu des points doubles, est leur cercle orthogonal commun; ce cercle est aussi le lieu des points de contact des tangentes issues du point Q aux cercles du réseau; d'où l'on peut conclure que, dans le cas général, par continuité, la conique lieu des points doubles est aussi le lieu des points de contact des tangentes issues du point Q à toutes les courbes du réseau.

26. Il reste enfin le cas le plus simple, où toutes les courbes du réseau ont trois points communs, et où la Cayleyenne se compose de ces trois points.

DU SYSTÈME PONCTUEL DU TROISIÈME ORDRE.

Équation générale en coordonnées ordinaires :

$$\lambda C + \mu C' + \nu C'' + \rho C''' = 0.$$

27. Considérons quatre coniques quelconques C, C′, C″, C‴; chacun des deux réseaux [C.C′.C″] et [C′.C″.C‴] donne lieu à une Cayleyenne; ces deux courbes, étant de la troisième classe, admettent neuf tangentes communes, qui rencontreront les coniques de chacun des deux réseaux suivant une involution linéaire (**19**). Parmi ces neuf tangentes, il y en a six qui sont les cordes communes aux coniques C′ et C″, qui font partie des deux réseaux (**19**), et pour lesquelles les involutions suivant lesquelles elles coupent chaque réseau ne coïncident pas, puisqu'elles n'ont qu'un segment commun, celui qui est déterminé par les deux points communs aux coniques C′ et C″; pour les trois autres, les deux involutions coïncident, car elles ont deux segments communs, déterminés sur chacune d'elles par les coniques C′ et C″. Il y a donc trois droites qui rencontrent quatre coniques quelconques suivant huit points en involution; en un mot, ces quatre courbes admettent trois couples de points conjugués; mais ils ne sont pas distincts, et l'un d'eux résulte des deux autres, comme l'exprime le théorème de Hesse (**10**).

Ces trois couples n'étant pas distincts, les cercles ayant pour diamètres les segments qu'ils interceptent doivent avoir même axe radical; ce qui résulte également d'un théorème connu sur le quadrilatère complet.

Nous allons étudier l'ensemble des coniques qui admettent ces trois couples non distincts et qui satisfont ainsi à deux conditions : c'est le *système ponctuel du troisième ordre*. Comme on le voit, il peut être défini : soit par deux couples, alors on peut en construire linéairement une courbe quelconque; soit par quatre de ses courbes, alors la détermination des deux couples est un problème du troisième degré. Dans tous les cas, on peut énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Étant données quatre coniques quelconques, on peut les combiner trois à trois de quatre manières. On obtient ainsi quatre réseaux et quatre Cayleyennes. Ces quatre courbes ont trois tangentes communes qui coupent les quatre coniques suivant une involution linéaire.*

28. Cherchons maintenant à construire une courbe quelconque d'un pareil système, défini par quatre de ses courbes. Si nous nous en donnons un point, ou un couple de points conjugués, les courbes correspondantes, admettant trois couples distincts, formeront un réseau (18). D'ailleurs trois de ces courbes sont évidemment les trois courbes qui admettent le couple donné et qui passent respectivement par l'intersection des coniques C et C′, C′ et C″, C″ et C‴; nous pourrons donc ainsi construire autant de courbes du système que nous le voudrons, et nous arrivons en même temps au théorème suivant :

THÉORÈME. — *Étant données quatre coniques quelconques, les six coniques qui passent par l'intersection de ces quatre courbes combinées deux à deux, et qui admettent un couple donné de points conjugués, ou qui passent par un point donné, appartiennent à un même réseau.*

29. Un couple quelconque de points conjugués déterminant dans un système du troisième ordre un réseau dont la Cayleyenne est tangente aux trois droites sur lesquelles se trouvent les trois couples de points conjugués du système du troisième ordre, il en résulte, en vertu des propriétés de cette courbe (19), que cette quatrième droite quelconque, qui renferme le couple, rencontrera les trois premières en trois points dont les conjugués harmoniques sur chacune d'elles sont en ligne droite; c'est une démonstration de ce theorème connu :

Théorème. — *Si l'on coupe par une droite quelconque le triangle dont les côtés sont les diagonales d'un quadrilatère complet, les trois points situés sur chaque côté et respectivement conjugués harmoniques par rapport aux extrémités de la diagonale du point d'intersection de ce côté avec la droite sont en ligne droite.*

30. Les courbes d'un système du troisième ordre étant assujetties à deux conditions, il y aura dans le système une infinité de cercles ayant même axe radical. Ils formeront un faisceau orthogonal aux deux cercles ayant pour diamètres les segments déterminés par les couples de points conjugués.

Il y aura aussi un réseau d'hyperboles équilatères, déterminé par trois quelconques des six hyperboles équilatères qui passent par les points d'intersection des quatre coniques données prises deux à deux (28).

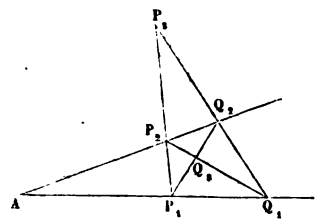
31. Comme cas particulier du système du troisième ordre, on pourra avoir à considérer toutes les coniques qui passent par un point donné et qui admettent un couple donné. Soient alors C, C', C'', C''' les quatre courbes qui déterminent le système : les deux réseaux (C, C', C'') et $(C', C'' C''')$ donnent lieu chacun à une Cayleyenne, composée du point fixe et d'une conique (24). Ces deux courbes admettent neuf tangentes communes qui sont les quatre tangentes communes aux deux coniques Σ et Σ', les quatre

tangentes menées à ces courbes du point fixe et une droite quelconque passant par le point fixe. Mais nous savons que sur ces neuf tangentes communes, il y a les six cordes communes aux coniques C′ et C″, qui ne coupent pas les courbes du système suivant une involution. Sur ces six cordes, trois ne passent pas par le point fixe et sont conséquemment tangentes communes à Σ et Σ′; les trois tangentes communes qui coupent les courbes du système suivant une involution sont donc la quatrième tangente commune à Σ et à Σ′, pour laquelle l'involution ne présente rien de particulier, et deux droites *quelconques* passant par le point fixe, pour lesquelles l'involution a ses points doubles confondus. On peut concevoir ce cas comme une limite du précédent, en supposant que le point P_2 se confonde avec le point Q_2, le couple $P_1 Q_1$ ne changeant pas, alors le point P_3 vient se confondre au même point avec le point Q_3. La tangente commune à Σ et à Σ′ serait alors $P_1 Q_1$, et le point commun serait Q_2.

On peut concevoir en outre que le point P_1 vienne se confondre avec le point Q_1, ce qui donne lieu au cas le plus simple, celui où le système du troisième ordre se compose de toutes les coniques qui ont deux points communs.

32. Citons encore le cas où deux sommets du quadrilatère $P_1 Q_1 P_2 Q_2$, (*fig.* 6), sommets n'appartenant pas au même

Fig. 6.



couple, viendraient à se confondre, par exemple, P_1 et P_2. Alors le point A se confondrait en ce point avec le point Q_3;

et P_1 étant à la fois conjugué de P_2, de Q_1 et de Q_2, il en résulte que la droite Q_1Q_2 serait la polaire de ce point; le système se composerait donc de toutes les courbes pour lesquelles on connait la polaire d'un point.

33. Problème. — *Construire la droite, qui forme avec une droite donnée conique d'un système du troisième ordre.*

Il suffira, pour cela, de chercher les points d'intersections A et B de la droite donnée avec une conique du système, et de construire les deux autres points par où passent toutes les coniques du système qui passent par les points A et B (13); la droite qui joint ces deux points est la droite cherchée. Ce problème exige la détermination par points de trois coniques; car si A et B sont les points d'intersection de la droite donnée avec la conique C''', il faudra construire les coniques $A(C, C')$, $A(C', C'')$, qui forment avec C''' un réseau, dans lequel le faisceau dont deux coniques sont C''' et B $[A(C, C'), A(C', C'')]$ détermine les deux points cherchés que l'on peut construire quadratiquement, puisque l'on connaît déjà A et B.

Si le système est déterminé par le quadrilatère $P_1Q_1P_2Q_2$, la droite cherchée sera celle qui joint les points conjugués harmoniques sur chaque diagonale et par rapport à ses extrémités de son point d'intersection avec la droite donnée. La construction est alors linéaire.

DU SYSTÈME PONCTUEL DU QUATRIÈME ORDRE.

Équation générale en coordonnées ordinaires :

$$\lambda C + \mu C' + \nu C'' + \rho C''' + \sigma C'''' = 0.$$

34. Si enfin l'on considère cinq coniques quelconques C, C', C'', C''', C'''', cette fois, il n'arrivera pas généralement qu'il existe une droite qui les coupe suivant dix points en involution; il faudrait pour cela que l'un des trois couples du système de troisième ordre $[C, C', C'', C''']$ coïncidât avec

l'un des trois couples du système $[C', C'', C''', C'''']$. Néanmoins, ces cinq courbes satisfont à une condition commune, qui nous apparaîtra plus tard explicitement (119), et dont nous allons implicitement faire voir l'existence. Supposons, en effet, que l'on se donne un couple de points conjugués, P_1Q_1, ou un point, et que l'on construise les quatre coniques qui admettent ce couple ou passent par ce point, et qui passent respectivement par l'intersection des coniques $[C, C']$, $[C', C'']$, $[C'', C''']$, $[C''', C'''']$. On peut combiner ces cinq coniques deux à deux de six autres manières, et construire six autres coniques analogues; considérons, parmi elles, la conique qui admet le même couple et passe par l'intersection des coniques C et C''; elle appartient au système du troisième ordre, déterminé par les quatre premières. En effet, les trois coniques P_1Q_1 $[C, C']$, P_1Q_1 $[C', C'']$ et P_1Q_1 $[C'', C]$, ayant en commun le couple P_1Q_1, et les trois couples communs aux coniques C, C', C'' appartiennent à un même faisceau (10); par suite, les quatre coniques $P_1Q_1[C, C']$, $P_1Q_1[C', C'']$, $P_1Q_1[C'', C]$, $P_1Q_1[C'', C''']$ appartiennent à un même réseau; enfin, les cinq coniques en question appartiennent à un même système du troisième ordre, et de même les cinq autres. On donne le nom de *système du quatrième ordre* à l'ensemble des coniques que l'on peut ainsi construire de cette façon, au moyen des cinq premières; elles sont assujetties à une condition, puisque celles d'entre elles qui admettent un couple de points conjugués en admettent un autre distinct du premier, et nous énoncerons le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Si l'on combine deux à deux, de dix manières différentes, cinq coniques quelconques, et que l'on construise les dix coniques qui passent par les points d'intersection de deux d'entre elles et admettent un même couple de points conjugués, ces dix courbes appartiennent à un même système du troisième ordre.*

35. Parmi les courbes de ce système, il y aura un sys-

tème du troisième ordre d'hyperboles équilatères, dont quatre courbes seront les quatre hyperboles équilatères qui passent par les points d'intersection des coniques $[C, C']$, $[C', C'']$, $[C'', C''']$ et $[C''', C'''']$; et un réseau de cercles que l'on pourra construire en se donnant deux couples de points conjugués situés à l'infini, dans des directions perpendiculaires; soient P_1Q_1 et P_2Q_2 ces deux couples déterminant ainsi implicitement les points circulaires de l'infini, il suffira de construire d'abord les quatre coniques $P_1Q_1[C, C']$, $P_1Q_1[C', C'']$, $P_1Q_1[C'', C''']$ et $P_1Q_1[C''', C'''']$; trois des coniques qui admettent le couple P_2Q_2, et qui passent par les points d'intersection de ces quatre courbes prises deux à deux, seront des cercles, puisqu'elles seront à la fois conjuguées aux deux couples P_1Q_1 et P_2Q_2, et appartiendront au système du quatrième ordre, puisqu'elles appartiennent au système du troisième ordre, déterminé par les quatre coniques précédentes (28), lequel fait lui-même partie du système du quatrième ordre (34).

On résoudrait de la même façon tous les problèmes relatifs à ce système, et dans lesquels il s'agirait de construire des coniques au moyen de points ou de couples de points conjugués.

36. Problème. — *Construire un système de deux droites formant conique d'un système du quatrième ordre.*

On pourra d'abord se donner une des deux droites et un point de l'autre droite, puisque cette conique est déjà assujettie à deux conditions qui sont de faire partie du système et d'être un système de deux droites. Soient A et B les points d'intersection de la droite donnée et d'une conique quelconque du système; toutes les coniques du système qui passent par ces deux points forment un réseau à deux points communs, que l'on pourra déterminer par trois de ses courbes (35), et dans lequel on pourra construire le point Q (25), puisque l'on connaît les deux points A et B. La droite qui joindra le point donné à ce point Q formera,

avec la droite donnée, une conique qui fera partie du réseau (25), et, conséquemment, du système du quatrième ordre. On peut même dire qu'une droite quelconque passant par le point Q forme avec la droite donnée conique du réseau (25).

Ce point Q serait donc le même, quels que soient les deux points A et B sur la droite donnée; nous en verrons la raison géométrique (119).

La recherche de ce point exige la détermination par points de cinq coniques, car, si A et B sont les points d'intersection de la droite donnée avec la conique C'''', il faudra construire les coniques $A[C.C']$, $A[C'.C'']$ et $A[C''.C''']$, qui, avec C'''', détermineront un système du troisième ordre, dans lequel les coniques $B[A(C.C').A(C'.C'')]$ et $B[A(C'.C'').A(C''.C''')]$ détermineront avec C'''' le réseau cherché. Dans ce dernier, on pourra trouver le point Q, puisqu'on connaît les points A et B.

37. Ici se termine ce que nous avons à dire sur les systèmes ponctuels; l'on peut, comme nous l'avions annoncé, remarquer que leur étude, outre qu'elle était nécessaire pour les applications que nous en ferons, nous a permis de résoudre des problèmes, consistant à construire une conique dont on connaît cinq éléments, points ou couples de points conjugués, problèmes que nous avions déjà résolus lorsque ces éléments sont donnés directement, nous a permis de les résoudre dans le cas beaucoup plus général où ils sont donnés implicitement, par exemple, quatre points par l'intersection de deux coniques dont on connaît les éléments, trois ou deux couples par trois ou quatre coniques auxquels ils sont communs et également déterminées. Nous reviendrons sur ces systèmes à propos de la *condition ponctuelle la plus générale*.

CHAPITRE III.

DES SYSTÈMES TANGENTIELS.

DU SYSTÈME TANGENTIEL DE PREMIER ORDRE, OU FAISCEAU TANGENTIEL.

Équation générale en coordonnées tangentielles:

$$\lambda C + \mu C' = 0.$$

38. Nous allons passer maintenant à l'étude des systèmes tangentiels; nous y retrouverons toutes les propriétés correlatives des précédentes, par voie de dualité, ce qui nous permettra d'abréger un peu.

Un *système tangentiel du premier ordre,* ou *faisceau tangentiel* est l'ensemble des coniques tangentes à quatre droites. D'après le théorème corrélatif de celui de Desargues-Sturm, les tangentes menées à ces courbes d'un même point quelconque forment un faisceau en involution, dont, par suite, les rayons doubles sont un système de droites conjuguées communes à toutes ces coniques; et l'on verrait, par un raisonnement analogue à celui que nous avons fait pour le faisceau ponctuel (9), que, réciproquement, toutes les coniques qui admettent quatre couples distincts de droites conjuguées ont quatre tangentes communes. Trois couples distincts en entraînent également une infinité, ainsi que nous le verrons plus loin; enfin, deux couples en entraînent un troisième, ainsi que cela résulte du théorème suivant :

THÉORÈME. — *Si les deux couples de côtés opposés d'un quadrilatère sont conjugués par rapport à une*

conique, les diagonales sont aussi conjuguées par rapport à cette courbe (¹).

39. Il résulte de la réciproque précédente :

1° *Que toutes les coniques qui ont trois tangentes communes et un système de droites conjuguées communes ont une quatrième tangente commune.*

Soient *abc* le triangle des trois tangentes, et P, Q les deux droites conjuguées : on obtiendra la quatrième tangente en joignant un sommet *c* du triangle au point *d* d'intersection de P et Q, prenant la conjuguée harmonique de *cd* par rapport à P, Q, et son point d'intersection *e* avec le côté *ab*; on déterminera ainsi trois points *e*, *f*, *g*, qui seront en ligne droite sur la tangente cherchée; d'où ce théorème :

THÉORÈME. — *Étant donnés un triangle et un faisceau en involution linéaire, les trois points situés respectivement à l'intersection de chaque côté du triangle et du rayon de l'involution conjugué de celui qui passe par le sommet opposé, sont en ligne droite.*

40. *Corollaire.* — Si les droites P et Q sont les asymptotes d'un cercle, le premier énoncé devient le suivant :

Toutes les coniques qui sont tangentes à trois droites, et qui sont vues d'un point donné sous un angle droit, admettent une quatrième tangente commune.

On sait que le lieu des points d'où l'on voit sous un angle droit une conique donnée est un cercle concentrique à la courbe, et dont le carré du rayon est égal à la somme des carrés de ses demi-axes (²). Comme nous aurons souvent ce cercle à considérer, nous lui donnerons le nom de cercle *orthoptique* de la conique (de ορθος, droit, et οπτομαι, je vois). Les cercles orthoptiques des deux coniques qui

(¹) HESSE, *De curvis et superficiebus secundi ordinis* (*Journal de Crelle*, t. XX, p. 301; 1840).

(²) Voici une démonstration géométrique, très-simple, de cette propriété : supposons, par exemple, que la courbe soit une ellipse, et soit M un

définissent un faisceau tangentiel se couperont donc en deux points, d'où les couples de tangentes issues à ces deux courbes seront rectangulaires, et comme les tangentes issues de chacun de ces points à toutes les courbes du faisceau sont en involution, il en résulte que tous les autres couples sont également rectangulaires. La réciproque du théorème précédent est donc aussi vraie, et peut s'énoncer ainsi :

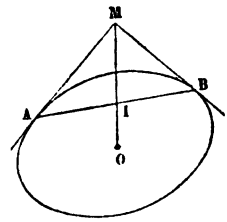
Il existe deux points (réels ou imaginaires) d'où l'on voit, sous un angle droit, toutes les coniques tangentes à quatre droites données.

Nous leur donnerons le nom de *sommets orthoptiques* du faisceau.

---

point d'où on la voit sous un angle droit (*fig.* 7); soient AB la corde de

Fig. 7.



contact, O le centre et a', b' les demi-diamètres conjugués parallèles à OM et à AB; on a

$$OM = OI + IM = \frac{a'^2}{OM} + IM;$$

mais l'angle M étant droit,

$$IM = IA = \frac{b'}{a'}\sqrt{a'^2 - \overline{OI}^2} \quad (\textit{Sections coniques}, \text{ p. } 124),$$

ou, en remplaçant $\overline{OI}^2$ par $\frac{a'^4}{\overline{OM}^2}$,

$$IM = \frac{b'}{OM}\sqrt{\overline{OM}^2 - a'^2}.$$

Remplaçant IM par cette valeur, et simplifiant, il reste

$$\overline{OM}^2 = a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Nous reviendrons plus loin (87) sur cette propriété remarquable et sur ses conséquences ([1]).

Les trois diagonales du quadrilatère des quatre tangentes pouvant être regardées comme des coniques du faisceau, nous retombons ainsi sur ce théorème connu :

Les cercles ayant pour diamètres les trois diagonales d'un quadrilatère complet ont même axe radical.

41. 2° *Que toutes les coniques qui ont deux tangentes communes et deux couples de droites conjuguées communes admettent deux autres tangentes communes.*

Pour les construire, on se donnera une troisième tangente passant par le point d'intersection des deux droites formant un des couples donnés ([2]), on en conclura une quatrième tangente passant par le même point, et l'on pourra en construire une cinquième tangente au moyen de trois de ces quatre tangentes et du second couple (39). En changeant la troisième tangente, on construira de la même façon une seconde conique, qui aura avec la première les deux tangentes communes données et les deux tangentes communes cherchées.

42. 3° *Que toutes les coniques qui ont une tangente commune et trois couples de droites conjuguées communes admettent trois autres tangentes communes.*

On ne peut les construire linéairement; mais on peut

([1]) Nous avons publié ce théorème dans les *Comptes rendus de la Société philomathique* (journal *l'Institut*, 20 décembre 1865), croyant l'avoir remarqué le premier. Depuis, nous l'avons rencontré dans un ouvrage de Plucker intitulé : *Analitisch-geometrische Entwicklungen*, t. II, p. 198; 1831. Plucker l'a démontré analytiquement, ainsi que M. P. Serret (*Géométrie de direction*, p. 113; 1869). Nous ne croyons pas qu'il en existe de démonstration plus simple que celle qui le déduit immédiatement du théorème corrélatif de celui de Desargues-Sturm.

Nous avions d'abord adopté l'expression *orthogone* (*Ibid.*). [*Voir* aussi *Rapport sur les progrès de la Géométrie* (CHASLES, p. 370; 1870).] Nous l'avons remplacée par l'expression *orthoptique*, qui nous a paru plus convenable.

([2]) Pour plus de simplicité, nous appellerons ce point le *sommet* du couple.

construire deux de ces coniques en s'en donnant une tangente passant par les sommets de deux des trois couples donnés. Elles auront la tangente commune donnée et les trois tangentes communes cherchées.

43. Problème. — *Construire une conique, connaissant quatre tangentes et un couple de droites conjuguées.*

1° Si les quatre tangentes sont données directement, au moyen des deux droites conjuguées et de trois quelconques d'entre elles, on pourra construire une cinquième tangente de la conique (39);

2° Si ce sont les tangentes communes à deux coniques déterminées, on connaîtra les tangentes issues du point d'intersection des droites conjuguées à la courbe cherchée; elles seront les rayons conjugués communs à deux faisceaux en involution linéaire.

44. Problème. — *Construire une conique, connaissant trois tangentes et deux couples de droites conjuguées.*

Au moyen des trois tangentes données et de chaque couple de droites conjuguées, on construira successivement une quatrième et une cinquième tangente de la conique (39).

45. Problème. — *Construire une conique, connaissant deux tangentes et trois couples de droites conjuguées.*

On construira deux des coniques qui admettent ces deux tangentes et deux des couples donnés, en s'en donnant une troisième tangente (44); elles détermineront un faisceau tangentiel dans lequel on construira la conique qui admet le troisième couple (43).

46. Problème. — *Construire une conique, connaissant une tangente et quatre couples de droites conjuguées.*

Il suffira de construire une conique admettant la tangente donnée et trois couples donnés, en s'en donnant une seconde tangente, que l'on fera passer, pour plus de simplicité, par les sommets de deux couples. Il en résultera une tangente dans chacun d'eux; on connaîtra donc effectivement quatre tangentes et un couple de droites conjuguées

de la conique auxiliaire; on en construira de même une seconde. Ces deux courbes détermineront un faisceau tangentiel, dans lequel on construira la conique qui admet le quatrième couple (43).

47. Problème. — *Construire une conique, connaissant cinq couples de droites conjuguées.*

On construira deux coniques admettant quatre des couples donnés, en s'en donnant arbitrairement une tangente passant par le sommet de deux des couples; elles détermineront un faisceau tangentiel dans lequel on construira la conique qui admet le cinquiène couple, solution aussi simple que sa corrélative.

48. Ainsi se trouvent résolus tous les problèmes dans lesquels on peut se proposer de construire une conique déterminée par cinq conditions tangentielles telles que tangentes ou couples de droites conjuguées, données directement, en entendant par *condition tangentielle.* toute condition telle, que quatre d'entre elles déterminent toutes les coniques qui ont quatre tangentes communes. Nous verrons plus loin quelle est la plus générale; quoi qu'il en soit, comme cas particulier des précédentes, nous pouvons indiquer dès à présent : 1° un point du cercle orthoptique, car les droites qui joignent ce point aux points circulaires de l'infini forment un couple de droites conjuguées; il en résulte que le centre et la somme des carrés des axes équivalent à trois conditions tangentielles; 2° un foyer, qui équivaut à deux conditions tangentielles, car les droites qui joignent ce point aux points circulaires de l'infini sont tangentes à la courbe; 3° un sommet orthoptique (40) d'un faisceau tangentiel équivaut à deux conditions tangentielles; 4° la condition d'être une parabole équivaut à une condition tangentielle, puisque c'est dire que la droite de l'infini est tangente à la courbe, d'où il résulte qu'un faisceau tangentiel n'admet en général qu'une parabole, et que s'il en admet deux, toutes les courbes du faisceau sont des

paraboles. En un mot, toutes les paraboles tangentes à trois droites forment un faisceau tangentiel.

L'étude des systèmes tangentiels d'ordre plus élevé que le premier, c'est-à-dire des coniques satisfaisant à une, deux, ou trois conditions tangentielles va nous permettre de résoudre les mêmes problèmes que précédemment, dans le cas où les conditions données le sont par la connaissance d'un certain nombre de coniques qui satisfont à plusieurs d'entre elles.

DU SYSTÈME TANGENTIEL DU SECOND ORDRE OU RÉSEAU TANGENTIEL.

Equation générale en coordonnées tangentielles :

$$\lambda C + \mu C' + \nu C'' = 0.$$

49. La définition du réseau tangentiel dérive du théorème d'après lequel les trois coniques tangentes à une droite donnée et admettant respectivement les mêmes tangentes communes que trois coniques fixes, prises deux à deux, admettent trois autres tangentes communes et constituent un faisceau tangentiel. On obtiendra donc un faisceau quelconque du réseau défini par trois coniques en s'en donnant arbitrairement une tangente.

50. Théorème. — *Toutes les coniques qui admettent trois couples distincts de droites conjuguées communes, forment un réseau tangentiel.*

Ce théorème se démontrerait par un raisonnement tout à fait analogue à celui qui concerne le réseau ponctuel (18).

Réciproquement :

Théorème. — *Toutes les coniques d'un réseau tangentiel admettent une infinité de couples de droites conjuguées communes, dont trois sont distincts.*

51. Le lieu du point d'intersection de deux droites conjuguées de ce groupe est une courbe du troisième degré, qui peut être définie par trois de ses points et deux droites

particulières passant par chacun d'eux. C'est la Hessienne du réseau [1]. Les trois points d'intersection d'une droite quelconque avec cette courbe sont les points d'intersection de cette droite avec les trois autres droites du plan qui sont tangentes à toutes les courbes du réseau tangentes à la première.

Pour obtenir le troisième point d'intersection de la courbe et de la droite qui joint les sommets de deux des couples donnés, il suffira de construire les conjuguées harmoniques de cette droite par rapport aux deux couples dont elle joint les sommets, de joindre leur point d'intersection avec le sommet du troisième couple donné, et de construire la conjuguée harmonique de cette droite par rapport au troisième couple; elle passera par le point cherché.

La courbe étant définie comme nous l'avons dit, on en aurait donc autant de points qu'on voudrait, et l'on verrait qu'ils se groupent deux par deux, et que ces groupes de deux points sont les coniques du réseau qui sont réduites à deux points. D'où l'on conclut que :

Les dix-huit ombilics communs à trois coniques quelconques prises deux à deux sont sur une même courbe du troisième degré.

Il en résulte en outre que chacun de ces systèmes de deux points est conjugué par rapport à chacun des couples de droites conjuguées dont la courbe est le lieu des sommets, d'où ce théorème :

Théorème. — *Si l'on joint chaque point variable de la courbe à un point fixe pris sur elle, et qu'on construise la*

---

[1] C'est en effet Hesse qui a démontré le premier que toute courbe du troisième degré peut être considérée, de trois manières différentes, comme le lieu des couples de points conjugués communs d'un réseau ponctuel (*Journal de Crelle*, t. XXXVI, p. 143), ou, ce qui revient au même, ainsi que nous le verrons plus loin, comme le lieu des sommets des couples de droites conjuguées communes d'un réseau tangentiel. Il l'a démontré analytiquement, et en a déduit géométriquement un certain nombre de propriétés de ces courbes.

conjuguée harmonique de cette droite par rapport au couple correspondant à ce point variable, toutes ces droites passent par un second point de la courbe, formant avec le premier conique du réseau.

D'où l'on conclut que, lorsque quatre couples de droites conjuguées ne sont pas distincts, si l'on construit les trois droites qui joignent le sommet de l'un d'eux à celui des trois autres, et leurs conjuguées harmoniques dans chacun de ces trois couples, ces trois dernières droites passent par un même point.

Nous reviendrons plus loin sur cette courbe, qui jouit de propriétés si remarquables, et son étude, comparée à celle de la Cayleyenne d'un réseau ponctuel, achèvera de nous faire connaître ses curieuses propriétés.

52. La condition pour une conique d'être vue d'un point donné sous un angle droit étant une condition tangentielle, il en résulte le théorème suivant :

Théorème. — *Les trois coniques vues d'un point donné sous un angle droit et qui admettent les mêmes tangentes communes que trois coniques données, prises deux à deux, ont quatre tangentes communes.*

Si cependant les trois coniques qui définissent un réseau étaient vues d'un même point sous un angle droit, cela prouverait que les droites qui joignent ce point aux points circulaires de l'infini forment, avec les trois couples qui peuvent aussi déterminer le réseau, un système de quatre couples non distincts, c'est-à-dire que toutes les coniques du réseau sont aussi vues du point donné sous un angle droit. Il suffit pour cela qu'il y ait dans le réseau trois courbes jouissant de cette propriété et n'admettant pas quatre tangentes communes.

53. La condition d'avoir pour foyer un point donné étant une double condition tangentielle, il en résulte qu'il y aura toujours dans le réseau une conique ayant un point donné pour foyer; si ce point est sur la Hessienne, et que

les droites conjuguées qui passent par ce point ne soient pas conjuguées harmoniques par rapport aux droites A et B qui le joignent aux points circulaires de l'infini, c'est-à-dire perpendiculaires, le point fera partie de la conique dont il est le foyer, puisqu'elle est tangente aux droites A et B et à leurs conjuguées harmoniques par rapport au couple de droites qui se coupent en ce point; cette conique sera donc réduite à deux points, et l'on aura le second point au moyen du théorème énoncé précédemment (51). Si au contraire les deux droites conjuguées sont perpendiculaires, la condition d'avoir pour foyer le point considéré cessera d'être double, et il y aura une infinité de courbes du réseau qui y satisferont; de plus, elles formeront un faisceau, c'est-à-dire qu'outre le foyer commun, elles auront deux autres tangentes communes.

54. La condition d'être une parabole étant une condition tangentielle, on en conclut les théorèmes suivants :

Théorème. — *Les trois paraboles qui admettent les mêmes tangentes communes que trois coniques données, prises deux à deux, ont trois tangentes communes à distance finie* (1).

Théorème. — *Toutes les paraboles d'un réseau tangentiel ont trois tangentes communes, à distance finie.*

Et si trois courbes du réseau sont des paraboles qui n'aient pas trois tangentes communes, toutes les courbes du réseau sont des paraboles.

55. Problème. — *Construire, dans un réseau tangentiel, le faisceau déterminé par une droite.*

Il suffit de construire deux des trois coniques tangentes à cette droite et admettant les mêmes tangentes communes que les trois coniques, prises deux à deux, qui déterminent le réseau (49).

Problème. — *Construire, dans un réseau tangentiel,*

(1) Chasles, *Traité des Sections coniques*, p. 289.

le faisceau déterminé par un système de deux droites conjuguées.

Il suffit de construire deux des trois coniques conjuguées à ces deux droites et admettant les mêmes tangentes communes que les trois coniques, prises deux à deux, qui déterminent le réseau (43). Elles admettront les trois couples de droites conjuguées du réseau, outre le couple donné, et conséquemment auront quatre tangentes communes (38).

De la solution des problèmes précédents, on conclut celle des suivants :

Construire une conique d'un réseau tangentiel, connaissant :

1° *Deux tangentes,*

2° *Une tangente et un couple de droites conjuguées,*

3° *Deux couples de droites conjuguées,*

problèmes déjà traités, dans le cas où les trois couples de droites conjuguées du faisceau sont donnés directement (45, 46, 47).

Si les deux tangentes données sont imaginaires, la solution du premier de ces problèmes n'est pas applicable ; si elles sont imaginaires conjuguées, on pourra remplacer leur connaissance par celle de deux couples de droites réelles conjuguées par rapport à elles, et l'on tombera alors sur le troisième problème. Ainsi, pour construire la conique d'un réseau qui a pour foyer un point donné, on tracera par ce point deux couples de droites rectangulaires, on construira deux des coniques du réseau admettant l'un des couples ; elles détermineront un faisceau dans lequel la conique qui admet le second couple aura le point donné pour foyer, tandis qu'on n'aurait pas pu construire deux des coniques du réseau tangentes à la droite qui joint le point donné à l'un des points circulaires de l'infini.

56. *Cas particuliers du réseau.* — Toutes les coniques qui ont deux couples de droites conjuguées communes et

qui sont tangentes à une droite fixe peuvent être considérées comme conjuguées par rapport à deux droites qui se confondent avec la tangente commune, et forment conséquemment un réseau. La Hessienne du réseau se compose de cette droite et d'une conique dont il est facile de trouver cinq points, savoir : les deux points A et B où se coupent les deux droites de chacun des deux couples donnés, le point d'intersection des conjuguées harmoniques de la droite AB dans chacun des couples, et enfin les points doubles de l'involution linéaire dont deux couples de points conjugués sont les points d'intersection de la tangente commune avec les deux couples de droites conjuguées. Cette conique est donc déterminée, et les couples de droites conjuguées se coupant en chaque point de la courbe s'obtiendront facilement, puisque à chaque point de la tangente commune correspond un point de la conique, formant avec lui conique du réseau; on n'aura donc qu'à mener par chaque point de la conique deux droites conjuguées par rapport à deux de ces couples de points. De plus, le rapport anharmonique de quatre points de la tangente commune est égal à celui des droites qui joignent un cinquième point quelconque de la conique aux quatre points correspondants. Donc :

Théorème. — *Si une conique passe par les trois points de rencontre des côtés opposés d'un quadrilatère et par les points doubles d'une involution linéaire dont deux couples de points conjugués sont les points d'intersection d'une droite fixe avec les côtés opposés du quadrilatère, à chaque point de la conique correspond un point de la droite fixe, formant avec lui un couple de points conjugués par rapport aux trois couples de côtés opposés, et le rapport anharmonique de quatre points de la droite fixe est égal à celui des droites qui joignent un cinquième point quelconque de la conique aux quatre points correspondants.*

Enfin, le théorème général énoncé plus haut (51) devient :

THÉORÈME. — *Étant données trois coniques quelconques ayant une tangente commune, elles ont, deux à deux, dix-huit ombilics communs, dont neuf sont situés sur la tangente commune; les neuf autres sont sur une même conique.*

Si la tangente commune est la droite de l'infini, le théorème devient :

Les neuf ombilics communs, situés à distance finie, de trois paraboles quelconques, prises deux à deux, sont sur une même conique.

57. Si toutes les coniques du réseau ont deux tangentes communes, on a un second cas particulier de ce système. La Hessienne se réduit alors à trois droites qui sont les deux tangentes communes, et la droite Q, lieu des ombilics des coniques du réseau prises deux à deux, ombilics qui ne sont pas sur les tangentes communes. Les tangentes issues d'un point quelconque de cette droite à toutes les courbes du réseau forment un faisceau en involution linéaire, dont deux rayons conjugués sont cette droite et celle qui joint le point considéré au point d'intersection des deux tangentes communes. L'enveloppe des rayons doubles, qui est aussi celle des couples de droites conjuguées, est une conique tangente aux deux droites données, dans laquelle le point d'intersection de ces deux droites a pour polaire la droite Q, et enfin qui est aussi l'enveloppe des tangentes à toutes les coniques du réseau en leurs points d'intersection avec la droite Q. Nous passons rapidement sur ces propriétés, dont nous avons démontré les corrélatives (25).

58. Si les deux tangentes communes sont les droites qui joignent un point F du plan aux points circulaires de l'infini, le réseau est l'ensemble des coniques qui ont un foyer commun F et qui ont un même système de droites conjuguées. C'est le réseau corrélatif du réseau ponctuel com-

posé de l'ensemble des cercles qui coupent orthogonalement un même cercle. Or nous avons fait voir qu'à des cercles se coupant orthogonalement correspondent par voie de dualité des coniques confocales telles que, les cercles ayant leurs grands axes pour diamètres respectifs, se coupent orthogonalement [1]. De là résulte, comme il est facile de s'en rendre compte, que, si le réseau qui nous occupe est défini par trois de ses coniques, ayant pour foyer le point F, on décrira les trois cercles ayant leurs grands axes pour diamètres et leur cercle orthogonal commun, et l'on obtiendra une conique quelconque du réseau, en décrivant un cercle quelconque coupant ce dernier orthogonalement, joignant son centre O au point F, et prenant le diamètre OF du cercle pour grand axe de la conique, O pour centre et F pour foyer. En outre, la conique enveloppe des couples de droites conjuguées sera la conique concentrique au cercle orthogonal commun, et s'en déduisant de la même façon.

59. La propriété relative au cercle ayant pour diamètre le grand axe d'une conique, pourra souvent être utile dans la solution des problèmes résolus plus haut (**45**), dans le cas où deux des conditions données seront un foyer. Supposons, par exemple, qu'il s'agisse de construire une conique ayant un point F pour foyer, et conjuguée à trois couples de droites; le problème corrélatif consiste à construire un cercle conjugué à trois couples de points : c'est le cercle orthogonal aux trois cercles ayant pour diamètres les segments formés par ces couples de points. A l'un de ces cercles correspond, par voie de dualité, la conique ayant pour foyer le point F, pour directrice la polaire de ce point par rapport à l'un des couples de droites, et tangente à ces deux droites; le cercle, ayant pour diamètre son grand axe, est immédiatement connu, puisque deux de ses

---

[1] *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. V, p. 145.

points sont les pieds des perpendiculaires abaissées du point F sur ces deux droites, et que la directrice connue est aussi, par rapport à lui, la polaire du point F. On en tire donc la solution suivante. On construira trois cercles, ainsi qu'il suit, au moyen de chacun des trois couples; du point F on abaissera une perpendiculaire sur chaque droite du couple; le cercle passera par les pieds des deux perpendiculaires, et la polaire du point F sera la même par rapport au cercle que par rapport au couple de droites. On construira ensuite le centre radical de ces trois cercles, et la conique cherchée aura ce point pour centre, le point F pour foyer, et sera doublement tangente, suivant le diamètre OF, au cercle orthogonal aux trois premiers.

DU SYSTÈME TANGENTIEL DU TROISIÈME ORDRE.

Équation générale en coordonnées tangentielles :

$$\lambda C + \mu C' + \nu C'' + \rho C''' = 0.$$

60. Le système tangentiel du troisième ordre peut se définir par quatre coniques $C.C'.C''.C'''$ n'appartenant pas à un même réseau. Aux deux réseaux $[C.C'.C'']$, $[C'.C''.C''']$ correspondent deux Hessiennnes qui ont neuf points communs, de chacun desquels on peut mener, aux courbes de chaque réseau, des tangentes formant une involution (51). Parmi ces neuf points communs, il y en a six qui sont les ombilics communs aux deux coniques C' et C'' qui font partie des deux réseaux. Les tangentes issues de l'un de ces six points aux courbes des deux réseaux forment deux involutions qui n'ont que deux rayons conjugués communs, savoir les deux tangentes communes menées par ce point aux deux coniques C' et C'', et qui, par conséquent, ne coïncident pas nécessairement, tandis que pour les trois autres points, les deux involutions coïncident, puisqu'elles ont deux couples de rayons conjugués communs, qui sont les tan-

gentes menées aux coniques C′ et C″. D'où ce théorème :

THÉORÈME. — *Il y a trois points d'où l'on peut mener à quatre coniques quelconques huit tangentes en involution.*

En un mot, ces courbes admettent trois couples de droites conjuguées, mais l'un d'eux résulte des deux autres, conformément au théorème énoncé plus haut (38), et ces trois points sont les points de rencontre des côtés opposés d'un quadrilatère et le point de rencontre des diagonales.

61. Il est inutile d'insister sur la construction d'une courbe quelconque du système ; on pourra s'en donner soit trois tangentes, soit deux tangentes et un couple de droites conjuguées, soit une tangente et deux couples, soit trois couples. Elle donne lieu aux théorèmes suivants, dont le second est connu.

THÉORÈME. — *Les six coniques qui admettent les mêmes tangentes communes que quatre coniques quelconques, combinées deux à deux et qui admettent un même couple de droites conjuguées, ou sont tangentes à une même droite, appartiennent à un même réseau.*

THÉORÈME. — *Si l'on joint un point quelconque aux points de rencontre des côtés opposés et des diagonales d'un quadrilatère complet, les conjuguées harmoniques de chacune de ces droites, par rapport au couple de côtés opposés correspondant, passent par un même point.*

62. Il y aura dans le réseau une infinité de courbes ayant pour foyer un point donné ; elles formeront faisceau, c'est-à-dire qu'en outre elles auront deux tangentes communes. Les cercles ayant leurs grands axes pour diamètres auront même axe radical, et formeront un système orthogonal aux trois cercles ayant même axe radical, et déduits, comme nous l'avons expliqué plus haut (59), des trois couples de droites conjuguées à toutes les courbes du système.

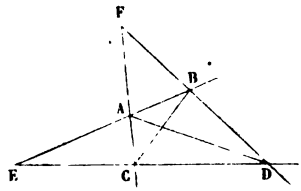
Toutes les courbes du système, vues d'un point donné sous un angle droit, formeront un réseau déterminé par trois quelconques des six coniques satisfaisant à cette con-

dition, et admettant les mêmes tangentes communes que les quatre coniques données prises deux à deux.

Toutes les paraboles du système formeront un réseau, et si quatre courbes du système sont des paraboles, toutes les autres seront aussi des paraboles.

63. Ce système donne lieu également à des cas particuliers. Toutes les courbes du système étant en effet conjuguées par rapport à trois couples de droites qui sont les couples de côtés opposés et les diagonales d'un quadrilatère, on peut concevoir que la droite AB (*fig.* 8) vienne

Fig. 8.



se confondre avec la droite CD, auquel cas les diagonales se confondent avec la même droite, et l'on a l'ensemble des coniques tangentes à une droite et conjuguées au couple FAC, FBD. Si, dans la même hypothèse, les droites du dernier couple viennent à se confondre, on a toutes les coniques tangentes à deux droites.

Enfin, si les deux droites qui se confondent sont des côtés du quadrilatère n'appartenant pas au même couple, la droite qui en résulte étant à la fois conjuguée par rapport à deux autres est la polaire de leur point d'intersection, et l'on a l'ensemble des coniques par rapport auxquelles une droite a pour pôle un point donné. L'on voit donc que, dans ce cas particulier, le système peut être considéré soit comme ponctuel, soit comme tangentiel (32).

La recherche du point qui forme avec un point donné conique du système, est analogue à la corrélative (33).

DU SYSTÈME TANGENTIEL DU QUATRIÈME ORDRE.

Équation générale en coordonnées tangentielles :

$$\lambda C + \mu C' + \nu C'' + \rho C''' + \sigma C'''' = 0.$$

64. Le système du quatrième ordre sera déterminé par cinq coniques n'appartenant pas à un même système du troisième ordre. La construction d'une courbe quelconque du système résulte du théorème suivant, à la démonstration duquel nous ne nous arrêterons pas :

THÉORÈME. —*Les dix coniques qui admettent les mêmes tangentes communes que cinq coniques quelconques prises deux à deux et qui admettent un même couple de droites conjuguées ou qui sont tangentes à une même droite, appartiennent à un même système tangentiel du troisième ordre.*

Toutes les courbes de ce système, comme celles du système ponctuel correspondant (34) satisfont à une condition commune, dont nous trouverons plus loin (93) l'expression géométrique.

On construirait deux points formant conique du système par une construction analogue à la corrélative (36).

CHAPITRE IV.

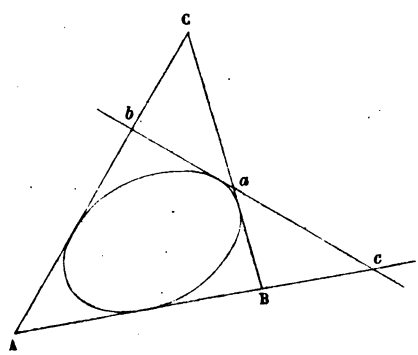
PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES CONIQUES EN INVOLUTION. CAS PARTICULIERS.

65. Théorème. — *Le carré de la puissance du centre d'une conique par rapport au cercle conjugué à un triangle circonscrit est égal à la somme des carrés de ses demi-axes.*

Nous aurons à nous servir de cette proposition, qui n'est autre que le théorème de Steiner un peu modifié, sur le lieu des centres des coniques inscrites à un triangle et dont la somme des carrés des axes est constante : c'est pourquoi nous avons cru bon d'en donner la démonstration suivante :

Soit ABC (*fig.* 9) un triangle circonscrit à une conique ;

Fig. 9.



coupons-le par une quatrième tangente quelconque *abc* ; par rapport au cercle conjugué au triangle ABC, A est le pôle de BC, donc les points A et *a* sont deux points

conjugués, de même B et b, C et c ; par suite, les cercles ayant pour diamètres les segments Aa, Bb, Cc, coupent orthogonalement le cercle conjugué au triangle ABC (20). Mais ces trois segments sont les diagonales du quadrilatère des quatre tangentes considérées, les cercles dont ils sont les diamètres ont donc même axe radical (40), et les deux points communs à ces cercles sont aussi communs au cercle orthoptique de la conique considérée, qui est inscrite dans ce quadrilatère (40). Il s'ensuit que tous les cercles qui coupent orthogonalement les trois premiers, jouissent de la même propriété par rapport à ce dernier; donc le cercle conjugué au triangle ABC coupe orthogonalement le cercle orthoptique de la conique considérée, ce qui n'est qu'une autre manière d'énoncer la proposition.

Réciproquement: *Si un cercle* C *coupe orthogonalement le cercle orthoptique d'une conique, on peut circonscrire à la conique une infinité de triangles conjugués au cercle.*

Car si l'on imagine un quelconque des triangles circonscrits à la conique qui ont pour point de rencontre des hauteurs le centre du cercle C, le cercle conjugué à ce triangle coupera orthogonalement le cercle orthoptique de la conique, mais, puisqu'il est conjugué au triangle, il est concentrique avec le cercle C (3); d'ailleurs, ces deux cercles ont un cercle orthogonal commun, donc ils coïncident.

CONIQUE HARMONIQUEMENT INSCRITE OU CIRCONSCRITE A UNE AUTRE CONIQUE.

66. On sait que lorsque six points sont les sommets de deux triangles conjugués à une même conique C, ils sont eux-mêmes situés sur une conique C′ [1]. Il existe alors une certaine dépendance entre les coniques C et C′ d'après

[1] CHASLES, *Traité des Sections coniques*, p. 140.

laquelle on peut inscrire dans la conique C′ une infinité de triangles conjugués à la conique C : on peut encore l'exprimer en disant que la polaire d'un point A′ de la conique C′ par rapport à la conique C coupe ces deux courbes en quatre points B′, C′, B, C qui sont en proportion harmonique, de telle sorte que le triangle A′B′C′ inscrit dans la conique C′ est conjugué par rapport à la conique C. L'on dit alors que la conique C′ est harmoniquement circonscrite à la conique C (¹) : corrélativement, une conique est harmoniquement inscrite à une autre conique, lorsqu'elle est inscrite dans une infinité de triangles conjugués à la seconde, ou encore lorsque les tangentes issues aux deux courbes du pôle, par rapport à la seconde, d'une tangente quelconque de la première sont en rapport harmonique. Cela posé, nous allons démontrer le théorème suivant :

Théorème. — *Lorsqu'une conique* C′ *est harmoniquement circonscrite à une conique* C, *la conique* C *est harmoniquement inscrite à* C′ (²).

Considérons en effet deux cercles O et O′ de rayons R et R′, et supposons que le cercle O′ soit harmoniquement circonscrit au cercle O. Il résulte du théorème de M. Faure (5) que la puissance du centre du cercle O par rapport au cercle O′ est égale à $R\sqrt{2}$. D'autre part, nous avons vu que lorsqu'un cercle coupe orthogonalement le cercle orthoptique d'une conique, la conique est harmoniquement inscrite à ce cercle (65). Si l'on applique cette proposition au cercle O′ qui coupe orthogonalement le cercle orthoptique du cercle O, il en résulte que le cercle O est harmoniquement inscrit au cercle O′. La proposition étant démontrée pour deux cercles, s'étend au moyen de la perspective à deux coniques quelconques. Nous dirons alors que les deux coniques sont *conjuguées réciproques*.

(¹) Smith, *Proceedings of the London mathematical Society*, n° 14, p. 85.

(²) Salmon, *Sections coniques*, p. 326, et Cremona, *Introduzione, etc.*, p. 87.

Corollaire. — *Si un cercle et une hyperbole équilatère sont conjugués réciproques, celle des deux courbes qui est harmoniquement circonscrite à l'autre passe par le centre de la seconde.*

Car la droite de l'infini coupe ces deux courbes suivant quatre points en proportion harmonique.

67. Théorème. — *Lorsque deux coniques* C′ *et* C″ *sont harmoniquement circonscrites à une même conique* C, *il en est de même de toutes les coniques du faisceau ponctuel* [C′.C″].

Car si l'on prend la polaire d'un des points communs aux coniques C′ et C″ par rapport à la conique C, elle coupera ces deux coniques suivant deux segments d'une involution linéaire dont les points doubles sont ses points d'intersection avec la conique C, puisque chacun de ces segments doit former avec ces deux points un rapport harmonique (66). Mais il en sera de même pour toutes les coniques du faisceau ponctuel [C.C′], car toutes les cordes déterminées dans ces courbes par cette droite sont des segments de cette involution ; on peut donc choisir sur l'une quelconque de ces courbes un point, qui est un de leurs points communs, dont la polaire par rapport à la conique C coupe elle et la conique C suivant quatre points en rapport harmonique ; donc l'une quelconque de ces courbes est harmoniquement circonscrite à la conique C.

68. De là résulte immédiatement le théorème général suivant :

Théorème. — *Lorsque les n coniques nécessaires à la détermination d'un système ponctuel d'ordre n — 1 sont harmoniquement circonscrites à une même conique* C, *toutes les coniques du système jouissent de la même propriété.*

On démontrerait d'un façon analogue le théorème corrélatif, savoir :

Théorème. — *Lorsque les n coniques nécessaires à la*

détermination d'un système tangentiel d'ordre n — 1 sont harmoniquement inscrites à une même conique, toutes les coniques du système jouissent de la même propriété.

69. De ces théorèmes résultent de curieuses propriétés d'involution. Le second des quatre théorèmes précédents peut en effet être considéré comme une généralisation du théorème de Desargues, qu'il suffit d'énoncer ainsi pour s'en apercevoir : *lorsque deux coniques sont conjuguées à deux points, toutes les coniques du faisceau ponctuel qu'elles déterminent sont également conjuguées à ces deux points,* tout en remarquant qu'une conique conjuguée à deux points peut être regardée comme harmoniquement circonscrite à la conique réduite à ces deux points, laquelle d'après le premier théorème (66) est de son côté harmoniquement inscrite à toutes les coniques du faisceau.

La réciproque se démontrerait absolument comme celle du théorème de Desargues (9), et peut s'énoncer ainsi :

Théorème. — *Toutes les coniques harmoniquement circonscrites à quatre coniques données forment un faisceau ponctuel.*

D'où il résulte :

1° Que parmi les coniques harmoniquement inscrites à deux coniques données il n'y en a que quatre de dictinctes, de même que parmi les couples de points conjugués communs (9).

2° Que la condition d'être harmoniquement circonscrite à une conique donnée est une condition ponctuelle, et c'est la plus générale que nous ayons rencontrée, car les cas que nous avons traités sont ceux où la conique donnée se réduit à un point ou à deux points.

Corrélativement, la condition d'être harmoniquement inscrite à une conique donnée est une condition tangentielle, par suite toutes les coniques harmoniquement inscrites à deux coniques données et dont nous venons de voir que quatre seulement sont distinctes, forment un sys-

tème tangentiel du troisième ordre, résultats compatibles puisqu'il faut quatre courbes pour déterminer ce système.

D'une façon générale, en supposant qu'une conique représente un système d'ordre zéro, on peut énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Si deux systèmes de coniques sont tels que chacune des courbes du premier soit harmoniquement circonscrite à toutes celles du second, chacune de ces dernières est harmoniquement inscrite à toutes celles du premier. Le premier système est ponctuel, le second est tangentiel et la somme de leurs ordres est égale à quatre* [1].

70. Suivant l'expression de M. Smith, ces coniques forment deux systèmes *contravariants*. Nous dirons de plus que les coniques d'un même système, étant conjuguées réciproques (66) d'un certain nombre de coniques fixes, sont *en involution*. De sorte que nous avons à étudier les dépendances qui existent entre deux systèmes contravariants, dans les cinq cas fournis par le théorème précédent, et signalés par M. Smith :

1° Une conique, formant système ponctuel d'ordre zéro, harmoniquement circonscrite à toutes les courbes d'un système tangentiel du quatrième ordre.

2° Un faisceau ponctuel, contravariant d'un système tangentiel du troisième ordre.

3° Deux réseaux contravariants, l'un ponctuel, l'autre tangentiel.

4° Un système ponctuel du troisième ordre contravariant d'un faisceau tangentiel.

---

[1] Au moment de faire paraître ce travail, nous avons appris, par l'obligeance de M. Cremona, que cet important théorème, ainsi que les précédents (67), (68), étaient déjà énoncés par M. SMITH. *On some geometrical constructions* (*Proceedings*, n° 14). C'est en effet à lui qu'ils appartiennent, et c'est après avoir lu cet intéressant article que nous avons adopté les dénominations de cet auteur.

5° Un système ponctuel du quatrième ordre dont toutes les courbes sont harmoniquement circonscrites à une même conique, laquelle forme système tangentiel d'ordre zéro, et de son côté est harmoniquement inscrite à cinq coniques données.

Ces cinq cas constituent l'ensemble de la théorie des coniques en involution, à laquelle conduit celle de l'involution plane, et qui est la généralisation des propriétés des segments en involution linéaire.

On voit que l'étude des différents systèmes avait sa place marquée devant elle, et qu'elle en constitue un cas particulier.

71. Avant de passer en revue les différents cas que nous venons d'exposer, nous étudierons plus spécialement celui où l'involution est circulaire, c'est-à-dire où les courbes harmoniquement inscrites ou circonscrites sont des cercles. Ainsi arriverons-nous plus facilement à trouver les relations qui existent entre les éléments au moyen desquels on peut déterminer deux faisceaux contravariants.

CAS PARTICULIER OU LA CONIQUE HARMONIQUEMENT INSCRITE EST UN CERCLE.

72. On peut toujours inscrire dans une conique une infinité de triangles ayant pour point de rencontre des hauteurs un point donné P; si l'on considère l'un d'eux, la conique est harmoniquement circonscrite au cercle ayant pour centre le point P et pour rayon la puissance du triangle (3), puisque le triangle est conjugué à ce cercle. Si l'on en considère un second, sa puissance sera la même, car si elle différait de la première, la conique serait harmoniquement circonscrite à une infinité de cercles concentriques au premier, ce qui est impossible, le point P étant quelconque. On peut donc dire que :

THÉORÈME. — *Tous les triangles inscrits dans une conique et ayant pour point de rencontre des hauteurs un point donné, ont même puissance.*

Tous ces triangles forment une involution plane circulaire; si le cercle triple est imaginaire, et si par son centre on élève sur le plan de l'involution une perpendiculaire égale à la puissance géométrique, de l'extrémité de cette perpendiculaire on verra sous un angle trièdre trirectangle tous les triangles de l'involution, conjugués au cercle et inscrits dans la conique (3). C'est pourquoi nous donnerons le nom de *puissance orthoptique de première espèce* par rapport à la conique à cette longueur qui est fixe pour chaque point du plan, et qui est la puissance commune de tous les triangles inscrits dans la conique et dont ce point est le point de rencontre des hauteurs.

73. Du théorème précédent, on conclut immédiatement le suivant :

THÉORÈME. — *Si l'on peut mettre sur un cône du second degré les arêtes d'un trièdre trirectangle, on peut en mettre une infinité.*

Car si l'on coupe le tout par un plan, ce trièdre est coupé suivant un triangle inscrit dans la conique d'intersection et ayant pour point de rencontre des hauteurs la projection sur le plan sécant du sommet du cône. Tous les triangles qui satisfont aux mêmes conditions, ayant même puissance (72), sont vus du sommet du cône sous un angle trièdre trirectangle. Nous dirons alors que le cône est *équilatère de première espèce* [1].

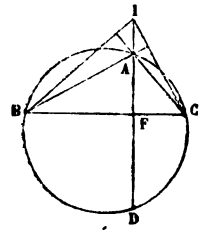
---

[1] Nous avons déjà proposé cette dénomination (Journal *l'Institut*, 20 décembre 1865; *Comptes rendus de la Société philomathique*).

DE LA PUISSANCE ORTHOPTIQUE DE PREMIÈRE ESPÈCE D'UN POINT PAR RAPPORT A UNE CONIQUE.

74. Si un triangle ABC (*fig.* 10) est inscrit dans un

Fig. 10.



cercle, et si le point I est le point de rencontre des hauteurs, on a

$$IF = FD;$$

d'ailleurs la puissance orthoptique p de ce point est égale à $\sqrt{IA.IF}$; la longueur l de la tangente issue de ce point est égale à $\sqrt{IA.ID}$ ou à $\sqrt{IA \times 2IF}$, d'où l'on conclut que $l = p\sqrt{2}$. Donc :

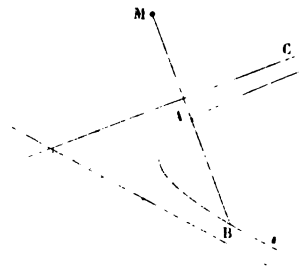
Théorème. — *La puissance orthoptique d'un point par rapport à un cercle s'obtient en divisant par* $\sqrt{2}$ *la longueur de la tangente issue de ce point* (1).

Elle est nulle pour les points du cercle, imaginaire pour les points intérieurs. Dans ce dernier cas, sa longueur géométrique est égale à l'ordonnée de la sphère dont le cercle serait un grand cercle, divisée par $\sqrt{2}$, et de l'extrémité de cette ordonnée ainsi réduite, on voit sous un angle trièdre trirectangle les triangles de l'involution correspondante (72).

(1) Aussi, lorsqu'il s'agira de la puissance orthoptique d'un point par rapport à un cercle, n'omettrons-nous jamais le mot *orthoptique*.

THÉORÈME. — *La puissance orthoptique d'un point par rapport à une conique est égale à la racine carrée du produit des segments comptés à partir du point sur une perpendiculaire à une asymptote jusqu'aux points d'intersection de cette droite avec la courbe.*

Fig. 11.



Soit p (*fig.* 11) la puissance d'un point M, on a

$$p^2 = \mathrm{MA}.\mathrm{MB};$$

car si C est le point à l'infini sur l'asymptote, on voit que le triangle ABC, inscrit dans la courbe a pour point de rencontre des hauteurs un point quelconque de la droite AB. Si M est ce point, la puissance du triangle est égale à $\sqrt{\mathrm{MA}.\mathrm{MB}}$.

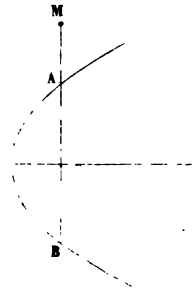
Il en résulte que, dans tous les cas, cette puissance est nulle si le point est sur la courbe. Si la courbe est dans l'angle obtus des asymptotes, les deux segments sont comptés dans le même sens pour un point situé à l'intérieur de la courbe, et la puissance est réelle; imaginaire dans le cas contraire. Si la courbe est dans l'angle aigu, comme sur la figure, c'est le contraire qui a lieu.

Si la courbe est une parabole dont les asymptotes quoique à l'infini ont une direction déterminée, le théorème devient :

La puissance orthoptique d'un point par rapport à une parabole est égale à la racine carrée du produit des seg-

ments comptés à partir du point sur une perpendiculaire à l'axe, jusqu'aux points d'intersection de cette droite avec la courbe.

Fig. 12.



On a (*fig.* 12)

$$p^2 = \mathrm{MA}.\mathrm{MB};$$

d'où l'on conclut que la puissance est réelle pour les points situés à l'extérieur de la courbe, imaginaire dans le cas contraire. Pour les points situés à l'intérieur de la courbe, il est visible que la puissance géométrique est égale à l'ordonnée de la surface engendrée par la révolution de la parabole autour de son axe.

Enfin dans le cas de l'ellipse le théorème subsiste toujours par continuité, bien que n'ayant plus de représentation graphique. La courbe sépare donc toujours les points du plan dont la puissance est réelle de ceux pour lesquels elle est imaginaire, et il est facile de voir par des cas particuliers qu'elle est imaginaire pour les points intérieurs, réelle pour les points extérieurs, que, par exemple, la puissance du centre est égale à $\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\sqrt{-1}$ [1].

[1] L'analyse fait voir que

$$f(x, y) = \mathrm{A}x^2 + 2\mathrm{B}xy + \mathrm{C}y^2 + 2\mathrm{D}x + 2\mathrm{E}y + \mathrm{F} = 0$$

étant l'équation de la courbe, la puissance du point (α, β) est égale à

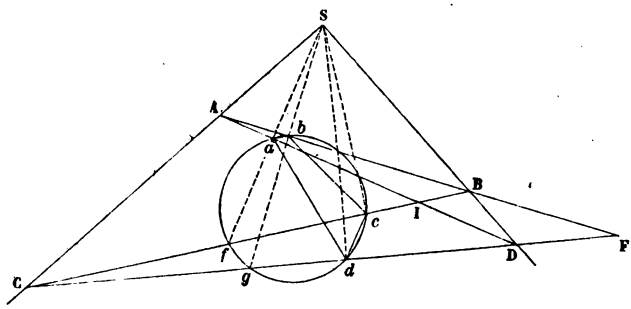
$$\sqrt{\frac{f(\alpha, \beta)}{\mathrm{A}+\mathrm{C}}}.$$

Si la courbe est une hyperbole équilatère, le théorème fait voir que la puissance d'un point est infinie si le point n'est pas sur la courbe, indéterminée dans le cas contraire. Elle est égale à l'ordonnée d'un cylindre droit ayant la courbe pour base, ce qu'on peut encore traduire en disant qu'il est impossible d'inscrire dans une hyperbole équilatère un triangle dont le point de rencontre des hauteurs ne soit pas sur la courbe, ce qui est conforme au théorème connu (**11**).

76. Théorème. — *Le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées d'un point* S *sur les cordes d'une conique vues de ce point sous un angle droit est un cercle. La puissance orthoptique du point* S *par rapport à la conique est égale à la longueur de la tangente menée du point* S *à ce cercle.*

Pour démontrer cette proposition, considérons un angle droit dont le sommet soit en S et abaissons du point S des perpendiculaires sur les quatre côtés du quadrilatère complet ABCD, A, B, C, D étant quatre points pris deux par

Fig. 13.



deux sur les côtés de l'angle. Soient *a, b, c, d* les pieds de ces perpendiculaires. Nous allons faire voir que ces quatre points sont sur un même cercle. On a, en effet (*fig.* 13),

$$\widehat{abc} = 2^{dr} - \left[\widehat{Aba} + \widehat{Bbc}\right].$$

Or les quadrilatères inscriptibles ASab, BSbc donnent

$$\widehat{\mathrm{A}ba} = \widehat{\mathrm{AS}a} \quad \text{et} \quad \widehat{\mathrm{B}bc} = \widehat{\mathrm{BS}c},$$

donc

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \widehat{abc} &= 2^{dr} - \left[\widehat{\mathrm{AS}a} + \widehat{\mathrm{BS}c}\right] \\ &= 2^{dr} - \left[1^{dr} - \widehat{a\mathrm{S}c}\right] = 1^{dr} + \widehat{a\mathrm{S}c}. \end{aligned} \right.$$

On a, de même dans les quadrilatères inscriptibles CScd, DSad

$$\widehat{\mathrm{C}dc} \quad \text{ou} \quad \widehat{\mathrm{C}da} + \widehat{adc} = 2^{dr} - \widehat{\mathrm{CS}c}$$

et

$$\widehat{\mathrm{D}da} \quad \text{ou} \quad \widehat{\mathrm{D}dc} + \widehat{adc} = 2^{dr} - \widehat{\mathrm{DS}a}.$$

Ajoutant

$$\widehat{\mathrm{C}da} + \widehat{\mathrm{D}dc} + 2\widehat{adc}$$

ou

$$2^{dr} + \widehat{adc} = 4^{dr} - \left[\widehat{\mathrm{CS}c} + \widehat{\mathrm{DS}a}\right] = 4^{dr} - \left[1^{dr} + \widehat{a\mathrm{S}c}\right];$$

d'où

$$(2) \qquad \widehat{adc} = 1^{dr} - \widehat{a\mathrm{S}c}.$$

Comparant les égalités (1) et (2), on voit que les angles opposés du quadrilatère $abcd$ sont supplémentaires, et par conséquent il est inscriptible.

Si l'on considère toutes les coniques qui passent par les quatre points A, B, C, D, deux de ces coniques sont les couples de droites AD, BC et AB, CD. Les puissances orthoptiques du point S par rapport à ces deux couples de droites sont respectivement $\sqrt{\mathrm{S}a.\mathrm{S}f}$ et $\sqrt{\mathrm{S}b.\mathrm{S}g}$ (75). Or il est facile de faire voir que les points f et g sont situés sur le cercle circonscrit au quadrilatère $abcd$, car on a

$$\widehat{afc} = \widehat{\mathrm{CS}f} + \widehat{\mathrm{SC}f};$$

or

$$\widehat{SCf} = \widehat{BSc},$$

parce que ces deux angles ont leurs côtés perpendiculaires ; donc

$$\widehat{afc} = \widehat{CSf} + \widehat{BSc} = 1^{dr} - \widehat{aSc}.$$

L'angle $\widehat{afc}$ est donc aussi supplémentaire de l'angle $\widehat{abc}$ en vertu de l'égalité (1) et le point f est sur le cercle; de même pour le point g.

Il en résulte que deux coniques du faisceau ponctuel ABCD sont harmoniquement circonscrites au cercle ayant pour centre le point S et orthogonal au cercle *abcd*, puisque, par le fait même qu'un point a une certaine puissance par rapport à une conique, la conique est harmoniquement circonscrite au cercle ayant pour centre ce point et pour rayon cette puissance (72).

Par suite, toutes les coniques du faisceau sont aussi harmoniquement circonscrites à ce cercle (67), c'est-à-dire que le produit $\sqrt{Sa.Sf}$, ou bien la longueur de la tangente menée du point S au cercle *abcd* est aussi la puissance du point S par rapport à toutes les coniques du faisceau.

En outre, la polaire du point S, qui est la même par rapport à toutes les coniques du faisceau puisque le point S est un sommet de leur triangle conjugué commun SIF, sera aussi la même par rapport au cercle *abcd*, puisque deux des cordes communes à ce cercle et à la conique AIC, par exemple, passent par le point S : ce sera la droite IF.

Pour une conique quelconque du faisceau, les cordes communes à cette courbe et au cercle *abcd*, cordes passant par le point S, seraient les perpendiculaires abaissées du point S sur les asymptotes de la courbe, car chacun des points d'intersection de l'une de ces perpendiculaires avec la conique est un point du lieu, ce qui fait voir encore que la puissance du point S par rapport à la conique, qui peut se

mesurer sur l'une de ces perpendiculaires (75), est égale à la longueur de la tangente menée du point S au cercle *abcd*.

Supposons maintenant que l'on ait une conique fixe et que les points A, B, C, D soient les points d'intersection des côtés de l'angle S avec la conique pour une position de cet angle tournant autour du point S. Pour chaque position de l'angle, le cercle correspondant sera un cercle par rapport auquel le point S a une puissance et une polaire données, savoir : la puissance orthoptique et la polaire du point S par rapport à la conique fixe, c'est-à-dire que le cercle ne variera pas et que pour toutes les positions de l'angle S, le lieu des points a, b, c, d sera un cercle coupant orthogonalement le cercle décrit du point S comme centre avec un rayon égal à la puissance du point S par rapport à la conique. C. Q. F. D.

De plus, l'axe radical de ces deux cercles, qui est la polaire du point S par rapport au cercle *abcd*, sera aussi sa polaire par rapport à la conique, et le cercle *abcd* aura avec la conique deux cordes communes passant par le point S et respectivement perpendiculaires sur ses asymptotes.

Si une conique est donnée par cinq points, il suffira pour construire ce cercle de faire passer par le point S les côtés indéfinis d'un angle droit; on en cherchera les points d'intersection avec la conique par l'une des méthodes connues, et l'on abaissera sur les quatre cordes ainsi obtenues des perpendiculaires, dont les pieds seront sur le cercle cherché et le détermineront amplement [1].

77. La puissance orthoptique d'un point par rapport à une conique étant ainsi parfaitement définie par plusieurs propriétés du cercle harmoniquement inscrit correspondant dont ce point est le centre, et sa puissance le rayon, étudions la puissance d'un point par rapport à toutes les

---

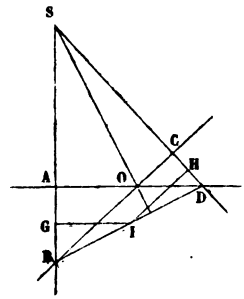
[1] Ce cercle n'est pas toujours réel, et il est facile de voir que lorsque le point S est sur le cercle orthoptique de la conique, il se réduit à un point,

coniques d'un faisceau ponctuel. Si l'on considère deux courbes de ce faisceau, un point donné aura généralement des puissances différentes par rapport à elles, et l'on peut chercher le lieu des points d'égale puissance qui sera alors la même pour toutes les coniques du faisceau (67). Ce lieu est une courbe qui passe par les quatre points d'intersection des deux premières, puisque ces points ont par rapport aux

---

qui est le pied de la perpendiculaire abaissée du point S (*fig.* 14) sur la polaire de ce point. Par suite, il sera réel lorsque le point S sera dans l'une des deux régions du plan dont le cercle orthoptique est la limite et imaginaire dans l'autre. Si la conique est une ellipse, il sera réel pour tous

Fig. 14.



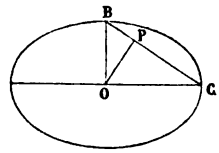
les points intérieurs au cercle orthoptique. Si c'est une hyperbole, pour tous les points extérieurs. Si c'est une parabole, pour tous les points situés du même côté de la directrice que la courbe. Il en résulte que, le cercle orthoptique étant imaginaire lorsque l'angle des asymptotes est plus grand qu'un angle droit, il sera toujours réel dans ce cas. La construction que nous en avons donnée est toujours applicable quand il est réel. S'il est imaginaire, il est facile d'en construire le centre, lequel est toujours réel, et de trouver la valeur géométrique du rayon. En effet, supposons que la courbe soit une hyperbole et abaissons du point donné S des perpendiculaires sur les asymptotes OA, OB de la courbe; elles déterminent dans la courbe et dans le cercle deux cordes communes (76) dont les points milieux G et H sont les mêmes que ceux des cordes AB, CD déterminées dans les asymptotes; si par ces points on mène des perpendiculaires à ces cordes, on aura le centre I du cercle en leur point d'intersection, qui est évidemment le milieu de la droite BD : d'où il résulte que BD est parallèle au diamètre conjugué de la droite qui joint le centre O de la courbe au centre I du cercle; mais le point O est le point de rencontre des hauteurs du triangle SBD, donc SO est perpendiculaire sur BD; de sorte que si par le point O on

deux coniques une puissance nulle, et il ne saurait être autre que l'hyperbole équilatère qui passe par ces quatre points, car le cercle qui a pour centre un point du lieu, et pour rayon la puissance correspondante, étant harmoniquement circonscrit à toutes les courbes du faisceau, et par conséquent à cette hyperbole équilatère, a nécessairement son centre sur cette courbe (66).

---

mène une perpendiculaire à OS, le diamètre conjugué OI de cette perpendiculaire passera par le centre du cercle; dans le cas de la parabole, ce point sera toujours sur l'axe. D'ailleurs, il est aussi sur la perpendiculaire abaissée du point S sur la polaire de ce point (76); il est donc déterminé. Quant au rayon, il est clair que, pour une même conique et lorsque le point S varie, il est proportionnel à la longueur de la tangente menée de ce point au cercle orthoptique, puisqu'il est nul en même temps qu'elle. Or il est facile de trouver la proportion, car si la courbe est par exemple une ellipse et qu'on prenne le point S au centre, le rayon du cercle cor-

Fig. 15.



respondant est égal à OP (*fig.* 15), la puissance géométrique du point O par rapport au cercle orthoptique est $BC = \sqrt{a^2 + b^2}$; ce rapport constant est donc géométriquement $\frac{OP}{BC}$, arithmétiquement $\frac{ab}{a^2 + b^2}$; par suite, pour un point quelconque S situé en dehors du cercle orthoptique, le rayon imaginaire sera égal à $l\frac{ab}{a^2 + b^2}\sqrt{-1}$, l étant la longueur de la tangente menée de ce point au cercle orthoptique. Pour une hyperbole et pour un point intérieur à ce cercle, le rayon serait $l\frac{ab}{a^2 - b^2}\sqrt{-1}$, l étant l'ordonnée de la sphère dont ce cercle serait un grand cercle. Pour la parabole, le rayon est égal à $\sqrt{2pd}$, d étant la distance du point à la directrice.

Remarquons enfin que, si le point S est sur la courbe, le cercle correspondant est tangent à la courbe en ce point et a pour diamètre le segment de la normale compris entre ce point et le point fixe par où passent toutes les cordes de la courbe vues du point S sous un angle droit. Si, dans le même cas, la courbe est une hyperbole équilatère, il se réduit à la tangente à la courbe en ce point.

On peut donc dire que :

THÉORÈME. — *Le lieu des points d'égale puissance par rapport à deux courbes d'un faisceau ponctuel est l'hyperbole équilatère du faisceau. Elle est aussi la même par rapport à toutes les courbes du faisceau.*

Chacun des points de l'hyperbole équilatère est donc le centre d'un cercle harmoniquement inscrit à toutes les courbes du faisceau, et il n'y en a pas ailleurs. Ce sont, du reste, les cercles du système tangentiel du troisième ordre contravariant du faisceau considéré (70); on peut donc énoncer le théorème autrement, et dire :

THÉORÈME. — *Le lieu des centres des cercles d'un système tangentiel du troisième ordre est l'hyperbole équilatère harmoniquement circonscrite à quatre d'entre eux.*

78. Assujettir une conique à avoir par rapport à un point donné une certaine puissance, c'est dire qu'elle est harmoniquement circonscrite au cercle dont ce point est le centre et dont le rayon est la puissance donnée.

La puissance d'un point équivaut donc à une condition ponctuelle (69); toutes les coniques qui ont par rapport à quatre points donnés des puissances données forment donc un faisceau ponctuel et ont quatre points communs (17). C'est ce qui résulte également de ce que nous venons de voir, car toutes ces courbes devront se couper sur l'hyperbole équilatère qui passe par les quatre points (77).

On aurait donc à déterminer les n points communs aux coniques passant par $4-n$ points donnés et par rapport auxquelles on connaît les puissances de n points. Nous n'insisterons pas sur ces problèmes qui sont analogues à ceux que nous avons déjà résolus (11, 13, 15) à propos des couples de points conjugués communs. Pour $n=1$, nous résoudrons d'ailleurs le problème général, dans le cas où la conique harmoniquement inscrite est quelconque (113).

79. Théorème. — *Lorsqu'une conique varie en passant par quatre points fixes, le cercle lieu des pieds des perpendiculaires abaissées d'un point donné sur les cordes de la conique vues de ce point sous un angle droit varie en passant par deux points fixes.*

Car si M est l'un des points d'intersection de deux de ces cercles, la perpendiculaire à SM menée par le point M interceptera dans les deux coniques correspondantes des cordes vues du point donné sous un angle droit; donc ce point sera le sommet de l'involution déterminée sur cette droite par le faisceau de coniques considéré; donc toutes les autres cordes seront aussi vues du point M sous un angle droit. c. q. f. d.

Si deux coniques sont données chacune par cinq points, on construira le cercle correspondant à chacune d'elles (76), et l'on aura ainsi leur axe radical. D'ailleurs cet axe radical est le cercle qui correspond à l'hyperbole équilatère du faisceau, car si par le point donné on mène deux parallèles à ses asymptotes, la corde interceptée est tout entière à l'infini, et par suite le pied de la perpendiculaire : le rayon du cercle devient alors infini.

En général, l'axe radical ne passera pas par le point donné; pour cela, il faudrait qu'il eût même puissance par rapport à tous les cercles et par suite (76) même puissance orthoptique par rapport à toutes les coniques du faisceau; c'est-à-dire qu'il devra être sur l'hyperbole équilatère du faisceau (77), qui sera ainsi le lieu des points tels que l'axe radical résultant de chacun d'eux passe par le point dont il résulte. De plus, l'axe radical sera la tangente à l'hyperbole équilatère au point considéré, puisque le point est sur cette courbe (76).

80. Passons maintenant au réseau ponctuel. Nous avons vu (21) que les trois hyperboles équilatères qui passent par les points communs à trois coniques données prises deux à deux ont quatre points communs; ces quatre

points auront par conséquent (77) même puissance par rapport à toutes les courbes du réseau ponctuel défini par ces trois coniques, et l'on peut dire :

THÉORÈME. — *Il y a quatre points qui ont même puissance par rapport à toutes les coniques d'un réseau ponctuel. Ce sont les sommets d'un triangle et le point de rencontre des hauteurs.*

Aussi ne sont-ils pas distincts, car s'ils l'étaient, les coniques formeraient faisceau ponctuel (78). La puissance de l'un d'eux peut aussi se déduire de celle des trois autres, car ils sont les centres des cercles qui appartiennent au réseau tangentiel contravariant du réseau considéré, et si l'on connaît trois de ces cercles, on connaît le centre du quatrième, et l'on sait qu'il appartient au réseau tangentiel défini par les trois premiers; il est donc déterminé, et nous verrons plus loin le moyen d'en déterminer le rayon (99). On peut aussi énoncer comme il suit le théorème précédent :

THÉORÈME. — *Il existe dans un réseau tangentiel quatre cercles, dont les centres sont les sommets du faisceau ponctuel d'hyperboles équilatères appartenant au réseau ponctuel contravariant du réseau considéré.*

Et l'on voit qu'un réseau ponctuel peut aussi être considéré comme l'ensemble des coniques par rapport auxquelles trois points donnés ont des puissances données.

81. THÉORÈME. — *Pour chaque conique d'un réseau ponctuel, le cercle lieu des pieds des perpendiculaires abaissées d'un point fixe sur les cordes de la conique vues de ce point sous un angle droit varie en coupant orthogonalement un cercle fixe.*

Tous les cercles analogues ont même centre radical : en effet, le réseau se compose d'une infinité de faisceaux, dans chacun desquels tous les cercles analogues, correspondant au point donné S, ont même axe radical (79); si donc C, C′, C″ sont les trois coniques qui déterminent le

réseau, les axes radicaux résultant des trois faisceaux formés par ces courbes considérées deux à deux ont un point commun C, centre radical des cercles correspondant aux trois coniques C, C′, C″. Ce point sera aussi commun à tous les autres axes radicaux ; car si nous considérons dans le réseau le faisceau déterminé par un point quelconque P, c'est-à-dire par les points communs aux trois coniques P [C, C′], P [C′, C″] et P [C″, C] (18), les cercles correspondants aux deux premières passent respectivement par les points communs aux cercles correspondants aux coniques C, C′ et aux coniques C′, C″; donc leur axe radical, qui est celui du faisceau déterminé par le point P, passe aussi par le point C.

Si le point S est un des points communs aux hyperboles équilatères du réseau, il sera lui-même le centre radical commun, et dans chaque faisceau l'axe radical correspondant sera la tangente à l'hyperbole équilatère de ce faisceau (79).

82. Problème. — *Déterminer parmi toutes les coniques d'un faisceau ponctuel, celle par rapport à laquelle un point donné a une puissance donnée.*

Le faisceau étant déterminé par deux coniques dont on connaît cinq points, on construira l'axe radical des cercles correspondants, au moyen des cercles correspondants aux deux coniques. Cela posé, si les points A et B communs à tous ces cercles sont réels, il suffira, pour avoir le cercle correspondant à la conique cherchée, de trouver sur la droite des centres un point C tel, que la longueur CA soit égale à la puissance du point C par rapport au cercle ayant pour centre le point S donné et pour rayon la puissance donnée, problème élémentaire : le cercle décrit du point C comme centre avec CA pour rayon sera le cercle cherché. Dans tous les cas, que les points A et B soient ou ne soient pas réels, on obtiendra le centre du cercle cherché en décrivant un cercle quelconque coupant orthogo-

nalement tous ceux du faisceau [A, B] et prenant le point d'intersection de la droite des centres avec son axe radical avec le cercle S. Puisque le cercle cherché coupe ce dernier orthogonalement, il est déterminé. Soit alors P un point quelconque de ce cercle, la perpendiculaire élevée sur SP au point P coupera la conique cherchée suivant deux points vus du point S sous un angle droit, et suivant deux points conjugués de l'involution déterminée sur cette droite par ses points d'intersection avec les deux coniques données ; ces deux points sont donc déterminés, car les deux involutions dont ils forment le segment commun ne coïncideraient que si le point P coïncidait avec l'un des points A et B.

Il est facile de voir que si le point S était sur l'hyperbole équilatère du faisceau, la puissance donnée n'aurait pas d'influence.

83. Problème. — *Construire la conique d'un réseau ponctuel par rapport à laquelle deux points donnés ont des puissances données.*

Les conditions données étant ponctuelles, il suffira de construire le faisceau déterminé dans le réseau par deux des trois coniques par rapport auxquelles un des points donnés a la puissance donnée et passant par les points d'intersection des trois coniques données prises deux à deux, et de construire dans ce faiseeau la conique par rapport à laquelle le second point donné a la puissance donnée (82).

84. On pourrait ainsi multiplier à l'infini les problèmes, suivant que les conditions données sont des points, des couples de points conjugués, ou des puissances, donnés directement ou par les systèmes de courbes qui y satisfont. Les solutions seraient analogues à celles que nous connaissons déjà, et ne seraient pas plus simples que celles que nous donnerons dans le cas général où la conique harmoniquement inscrite est quelconque. Nous avons

voulu indiquer le premier des deux problèmes précédents, parce que le problème général de la construction d'une conique harmoniquement circonscrite à cinq coniques données se ramène toujours finalement, comme nous le verrons, à celle de la conique d'un certain faisceau ponctuel qui est harmoniquement circonscrite à une des cinq coniques données. Or, si l'unes d'elles est un cercle, le problème pourra alors se ramener au premier des deux problèmes précédents, plus simple que le problème général, dans le cas où les deux cercles dont il exige la détermination sont réels.

Il n'existe pas, en général, de point par rapport auquel toutes les coniques d'un système ponctuel du troisième ordre aient la même puissance. Cela tient à ce que toutes ces courbes sont harmoniquement circonscrites à deux coniques données, et, par suite, à toutes celles du faisceau tangentiel qui en résulte, lequel est contravariant du système considéré (70). Or il n'y a pas, en général, de cercle dans un pareil système.

CAS OU LA CONIQUE HARMONIQUEMENT CIRCONSCRITE EST UN CERCLE.

85. On peut toujours circonscrire à une conique une infinité de triangles ayant pour point de rencontre des hauteurs un point donné P; nous avons vu que le cercle conjugué à l'un quelconque de ces triangles coupe orthogonalement le cercle orthoptique de la conique (65); tous ces triangles ayant même point de rencontre des hauteurs, tous les cercles conjugués sont concentriques, et comme ils coupent orthogonalement un même cercle, il faut qu'ils coïncident; d'où il suit que tous les triangles ont même puissance. Donc :

Théorème. — *Tous les triangles circonscrits à une*

conique et ayant pour point de rencontre des hauteurs un point donné ont même puissance.

Tous ces triangles forment une involution plane circulaire. — Si le cercle triple est imaginaire, ce qui arrivera lorsque le point P sera à l'intérieur du cercle orthoptique, quelle que soit la nature de la courbe, et si, par son centre, on élève sur le plan de l'involution une perpendiculaire égale à leur puissance géométrique, de l'extrémité de cette perpendiculaire on verra sous un angle trièdre trirectangle tous les triangles de l'involution conjugués au cercle et circonscrits à la conique (3). C'est pourquoi, nous donnerons le nom de *puissance orthoptique de seconde espèce* à cette longueur qui est fixe pour chaque point du plan et qui est la puissance commune de tous les triangles circonscrits à la conique et dont ce point est le point de rencontre des hauteurs.

Il en résulte comme plus haut (73) que :

Si l'on peut circonscrire à un cone du second degré les faces d'un angle trièdre trirectangle, on peut lui en circonscrire une infinité.

Nous dirons alors que le cone est *équilatère de seconde espèce.*

DE LA PUISSANCE ORTHOPTIQUE DE SECONDE ESPÈCE D'UN POINT PAR RAPPORT A UNE CONIQUE.

86. Ce qui précède la définit suffisamment : elle est égale à la longueur de la tangente menée du point considéré au cercle orthoptique. Elle est donc réelle pour tous les points extérieurs à ce cercle, nulle pour les points du cercle et imaginaire pour les points intérieurs. Dans ce dernier cas, sa longueur géométrique est égale à l'ordonnée de la sphère dont le cercle orthoptique serait un grand cercle (85), et de tous les points de cette sphère on voit

la conique sous un cone équilatère de seconde espèce (85). Aussi donnerons-nous à cette sphère le nom de *sphère orthoptique* de la conique, et dirons-nous :

La sphère orthoptique d'une conique est le lieu des points de l'espace d'où l'on voit la courbe sous un cône équilatère de seconde espèce.

Si la courbe est une parabole, le cercle orthoptique devient une droite, la directrice, et la sphère orthoptique se réduit à un plan, qui est le plan perpendiculaire au plan de la courbe et dont la trace est la directrice.

D'où il suit que lorsqu'un triangle est circonscrit à une parabole, la directrice passe par le point de rencontre des hauteurs, puisqu'elle doit couper orthogonalement le cercle conjugué au triangle.

87. Nous avons vu (40) que les cercles orthoptiques de toutes les coniques d'un faisceau tangentiel ont deux points communs, d'où l'on voit conséquemment sous un angle droit toutes les courbes du faisceau. Par suite, les sphères orthoptiques auront un cercle commun, perpendiculaire au plan du faisceau, et ce théorème peut s'énoncer ainsi :

Théorème. — *Il existe un cercle, situé dans un plan perpendiculaire au plan du faisceau, et de tous les points duquel on voit sous un cône équilatère de seconde espèce toutes les coniques d'un faisceau tangentiel.*

Nous aurons à en faire usage dans les applications de cette théorie aux surfaces du second degré, et nous lui donnerons le nom de *cercle orthoptique* du faisceau.

De la définition de la puissance orthoptique (86), il résulte qu'un point quelconque de l'axe radical commun aux cercles orthoptiques du faisceau a la même puissance par rapport à toutes les coniques du faisceau, réelle pour les points situés en dehors des deux points communs, imaginaire pour les autres, et égale alors à l'ordonnée correspondante du cercle orthoptique, ce qu'on peut énoncer comme il suit :

Théorème. — *Le lieu des points d'égale puissance orthoptique de seconde espèce par rapport à deux coniques est l'axe radical de leurs cercles orthoptiques. Tous les points de cette droite ont aussi même puissance par rapport à toutes les courbes du faisceau tangentiel déterminé par les deux premières.*

Si de chaque point de cette droite, on décrit un cercle avec la puissance commune pour rayon, ce cercle sera harmoniquement circonscrit à toutes les courbes du faisceau, puisque celles-ci lui sont harmoniquement inscrites (66), de sorte que l'on peut dire aussi (70) :

Le lieu des centres des cercles d'un système ponctuel du troisième ordre (qui est le système contravariant du faisceau considéré) *est une droite.*

Tous ces cercles, étant orthogonaux à une série de cercles ayant même axe radical, ont eux-mêmes même axe radical, qui est la droite des centres des premiers, ce qui n'est pas étonnant, la condition d'être un cercle étant une condition ponctuelle double (17), et, par suite, les cercles d'un système ponctuel du troisième ordre devant donner lieu à un faisceau ponctuel.

Les cercles orthoptiques ayant même axe radical, toutes les coniques du faisceau, qui leur sont respectivement concentriques, ont leur centre sur la droite des centres des cercles, ce qui démontre le théorème de Newton, savoir :

Le lieu des centres des coniques tangentes à quatre droites est une droite.

Si le faisceau est donné par les quatre tangentes communes, on aura immédiatement cette droite, qui est la droite qui joint les milieux des diagonales, et l'axe radical des cercles orthoptiques sera celui des cercles ayant pour diamètres respectifs les trois diagonales (40). Cet axe radical, étant le cercle orthoptique qui se réduit à une droite, est évidemment la directrice de la parabole du faisceau, et passe conséquemment par les points de rencontre des hau-

teurs des quatre triangles formés par les quatre tangentes considérées trois à trois (86), ce qui donne une nouvelle manière de le déterminer et conduit au théorème suivant :

Les quatre points de rencontre des hauteurs des triangles formés par quatre droites considérées trois à trois sont en ligne droite [1].

Ces quatre triangles donnent lieu à quatre cercles circonscrits, lesquels ont un point commun, savoir le foyer de la parabole tangente aux quatre droites, puisque le cercle circonscrit à un triangle circonscrit à une parabole passe par le foyer. Il s'ensuit que les quatre points symétriques du point commun à ces quatre cercles par rapport aux quatre tangentes sont en ligne droite sur l'axe radical des cercles orthoptiques.

Lorsqu'une conique est inscrite dans un triangle, la puissance du centre de la conique par rapport au cercle conjugué au triangle est égale à la somme des carrés des demi-axes (65). Une conséquence immédiate ce cette propriété est le théorème de Steiner, savoir :

Le lieu des centres des coniques inscrites dans un triangle et dont la somme des carrés des axes est constante est un cercle concentrique au cercle conjugué au triangle et dont le rayon est $\sqrt{p^2+K^2}$, *p étant la puissance du triangle, et* K^2 *la somme des carrés des demi-axes.*

Pour $K=0$:

Le lieu des centres des hyperboles équilatères inscrites dans un triangle est le cercle conjugué au triangle.

Par conséquent, un faisceau tangentiel étant déterminé par les quatre tangentes communes, les quatre cercles conjugués aux triangles formés par ces quatre droites considérées trois à trois auront deux points communs sur la

---

(1) MENTION, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. V, p. 13; 1846.

droite des centres, lesquels seront les centres des deux hyperboles équilatères du faisceau. Puisque ces quatre cercles font partie de la série des cercles orthogonaux aux cercles orthoptiques (65), leurs deux points communs sont les points conjugués communs aux seconds, points situés sur la droite des centres de ces derniers.

S'ils sont réels, les points communs aux cercles orthoptiques seront imaginaires et réciproquement : et, en effet, c'est qu'alors les deux hyperboles équilatères sont réelles, et elles ne peuvent être vues sous un angle droit que de leurs centres respectifs. Dans le même cas, le segment de la droite des centres compris entre ces deux points correspond aux hyperboles du faisceau dans lesquelles l'angle des asymptotes qui comprend la courbe est plus ouvert qu'un angle droit.

88. Considérons maintenant un réseau tangentiel; on peut voir de plusieurs façons que les cercles orthoptiques de toutes les courbes du réseau ont même centre radical. On pourrait d'abord faire un raisonnement analogue à celui que nous avons déjà fait pour une autre série de cercles (81). Indépendamment de cela, dans le réseau ponctuel contravariant du réseau considéré (70), il existe un cercle et un seul (20), et toutes les courbes du réseau tangentiel lui sont harmoniquement inscrites; conséquemment, il coupe orthogonalement tous leurs cercles orthoptiques (65) qui ont dès lors même centre radical. Enfin, l'on peut dire encore que toutes les paraboles du réseau tangentiel ayant trois tangentes communes (54), leurs directrices auront un point commun (86), point de rencontre des hauteurs du triangle des trois tangentes, qui aura dès lors même puissance orthoptique par rapport à toutes les courbes du réseau (87), puisque dans chaque faisceau du réseau, la directrice de la parabole correspondante est le lieu des points d'égale puissance. On peut donc dire que :

THÉORÈME. — *Il y a un point qui a même puissance par rapport à toutes les coniques d'un réseau tangentiel, ou que :*

THÉORÈME. — *Le centre du cercle du réseau ponctuel contravariant d'un réseau tangentiel est le point de rencontre des hauteurs du triangle des trois tangentes communes à toutes les paraboles de ce dernier.*

Si l'on considère les sphères orthoptiques au lieu des cercles orthoptiques, il est évident qu'elles auront même axe radical, par conséquent :

THÉORÈME. — *Il existe dans l'espace deux points, réels ou imaginaires, d'où l'on voit sous un cône équilatère de seconde espèce toutes les coniques d'un réseau tangentiel.*

Nous aurons à considérer ces deux points dans les applications aux surfaces de second degré, et nous les appellerons *sommets orthoptiques* du réseau (1).

Puisqu'il existe un cercle qui est harmoniquement circonscrit à toutes les courbes du réseau, le centre d'une quelconque de ces courbes a pour puissance par rapport à ce cercle la somme des carrés des demi-axes de la courbe (65), c'est-à-dire que le théorème de Steiner, relatif à toutes les coniques inscrites dans un triangle, peut s'appliquer à toutes les courbes d'un réseau tangentiel, et l'on peut dire :

THÉORÈME. — *Le lieu des centres des coniques d'un réseau tangentiel et dont la somme des carrés des axes est*

---

(1) Ce théorème et celui qui est relatif au cercle orthoptique d'un faisceau tangentiel (87), ne sont que des cas particuliers de théorèmes plus généraux, relatifs aux surfaces du second degré tangentes à sept et à huit plans, que nous avons publiés dans les *Comptes rendus de la Société philomathique de Paris* (journal *l'Institut*, 20 décembre 1865), et que M. P. Serret n'a pas dédaigné de s'approprier, malgré nos justes réclamations (*Géométrie de direction*, p. 122 et 125; 1869). — *Voir* également le *Rapport sur les progrès de la Géométrie* (CHASLES, p. 370; 1870).

constante est un cercle concentrique au cercle harmoniquement circonscrit à toutes ces courbes, et dont le rayon est $\sqrt{p^2 + K^2}$, *p étant le rayon de ce dernier cercle et* K^2 *la somme des carrés des demi-axes* (¹).

En particulier, pour $K = 0$:

Théorème. — *Le lieu des centres des hyperboles équilatères d'un réseau tangentiel est le cercle du réseau ponctuel contravariant.*

Ce cercle est par conséquent concentrique avec le cercle conjugué au triangle des trois tangentes communes aux paraboles du réseau, mais il ne coïncidera pas généralement avec lui, comme on pourrait le croire en remarquant que ce triangle, étant circonscrit à une infinité de coniques du réseau, la puissance de son point de rencontre des hauteurs par rapport à ces coniques doit être précisément la puissance du triangle (85). Ce raisonnement tombe de lui-même si l'on réfléchit que la puissance orthoptique de seconde espèce d'un point par rapport à une parabole est infinie si le point est ailleurs que sur la directrice, indéterminée dans le cas contraire. C'est la même chose qui arrive pour la puissance orthoptique de première espèce d'un point par rapport à une hyperbole équilatère selon qu'il est ou qu'il n'est pas sur cette courbe, aussi n'arrive-t-il pas généralement que l'un des points communs aux hyperboles équilatères d'un réseau ponctuel ait pour puissance commune par rapport à toutes les coniques du réseau la puissance du triangle des trois autres dont il est le point de rencontre des hauteurs.

89. Problème. — *Construire une conique d'un faisceau tangentiel, connaissant la puissance d'un point.*

On construira les cercles orthoptiques des deux coniques

(¹) M. P. Serret a énoncé, dans sa *Géométrie de direction*, p. 155, 1869, cette généralisation du théorème de Steiner.

qui déterminent le faisceau, et le cercle orthoptique de la conique cherchée sera celui qui a même axe radical que les deux premiers (40) et qui coupe à angle droit le cercle ayant pour centre le point donné et la puissance donnée pour rayon. Ce cercle une fois déterminé, d'un point du cercle on mènera des tangentes aux coniques données, lesquelles détermineront un faisceau en involution linéaire dont les rayons conjugués rectangulaires seront tangents à la conique cherchée.

90. Problème. — *Construire la conique d'un réseau tangentiel, par rapport à laquelle deux points donnés ont des puissances données.*

On ne peut pas se donner par rapport à une conique les puissances de seconde espèce de quatre points, car trois d'entre elles déterminent le cercle orthoptique, et les puissances de tous les autres points du plan en résultent. Néanmoins, la puissance d'un point est une condition tangentielle, car si l'on se donne trois de ces conditions, et une tangente, cette tangente donne lieu à un rectangle inscrit dans le cercle orthoptique qui est déterminé par les trois premières conditions, et circonscrit à la courbe cherchée. Toutes les courbes satisfaisant aux conditions données forment donc faisceau tangentiel, ce qui est le caractère de la condition tangentielle (48). Pour résoudre le problème cherché, il suffira donc de construire deux des trois coniques admettant les mêmes tangentes que trois des coniques du réseau donné, considérées deux à deux, et par rapport auxquelles l'un des points donnés ait la puissance donnée. Elles détermineront un faisceau dans lequel la conique cherchée aura par rapport au second point la puissance donnée (89).

91. Nous avons vu (40) que la condition tangentielle la plus générale donne lieu à beaucoup de cas particuliers. On pourrait d'après cela varier à l'infini la nature des pro-

blèmes relatifs à ce sujet, et chercher la solution particulière correspondante à chaque cas. Toutes ces solutions rentreront dans la solution générale du problème qui consiste à construire la conique harmoniquement inscrite à cinq coniques données.

CHAPITRE V.

EXAMEN DES CINQ CAS DANS LESQUELS DEUX SYSTÈMES PEUVENT ÊTRE CONTRAVARIANTS.

92. Nous avons vu (70) comme conséquence d'un théorème général, que l'on peut considérer de cinq manières distinctes deux systèmes d'espèces différentes, tels que toutes les coniques du système ponctuel sont harmoniquement circonscrites à celles du système tangentiel, et réciproquement, celles du second système sont harmoniquement inscrites à toutes celles du premier : n et n' étant les ordres des deux systèmes, on a $n+n'=4$, il suffit pour obtenir chacun des cas de faire varier n ou n' de o à 4. Jusqu'à présent, nous n'avons étudié que les cas particuliers où les coniques harmoniquement circonscrites ou inscrites sont un système de deux points ou de deux droites, ou bien des cercles; nous allons maintenant aborder le cas général.

Premier cas. — *Une conique harmoniquement circonscrite à toutes les courbes d'un système tangentiel du quatrième ordre.*

93. Dans ce cas, la conique doit être considérée comme formant système ponctuel d'ordre zéro, et nous disons que toutes les coniques du système tangentiel sont en involution (70), parce qu'il suffit qu'une conique soit inscrite dans l'un quelconque des triangles de l'involution plane

dont la conique donnée est la conique triple pour qu'elle fasse partie du système. Ce système présente d'ailleurs des analogies frappantes avec le système des segments conjugués à un segment fixe, c'est-à-dire formant une involution linéaire; car c'est l'ensemble des coniques harmoniquement inscrites à une conique fixe. De plus, si cette conique est un cercle, il coupe orthogonalement les cercles orthoptiques de toutes les courbes du système tangentiel (85), de même que dans l'involution linéaire, le cercle ayant pour diamètre le segment des points doubles, coupe orthogonalement les cercles ayant pour diamètres tous les autres segments : dans le même cas, le centre du cercle a même puissance de seconde espèce par rapport aux courbes du système (85), propriété analogue à celle du centre de l'involution linéaire; enfin, si c'est un cercle imaginaire, il y a deux points d'où l'on voit toutes les courbes du système sous un cône équilatère de seconde espèce (85), propriété analogue à celle des deux sommets de l'involution linéaire. Dans l'involution linéaire, on peut construire un segment quelconque lorsqu'on en connaît deux; ici nous pourrons construire une conique quelconque, lorsque nous en connaîtrons cinq; c'est ce que nous a appris l'étude du système tangentiel du quatrième ordre (64). Enfin la construction de la conique triple revient à rechercher la conique harmoniquement circonscrite à cinq coniques données, problème dont nous donnerons la solution ultérieurement (118). La condition géométrique à laquelle satisfont toutes les coniques d'un système tangentiel du quatrième ordre, et dont nous avons prouvé implicitement l'existence $(64)_2$ est donc d'être harmoniquement inscrites à une conique donnée; et comme il n'arrive pas généralement que cette conique soit un système de deux droites, nous n'avions pas découvert cette condition à un moment où nous n'examinions que le cas où les conditions tangentielles étaient des couples de droites conjuguées, ou,

ce qui revient au même, des coniques harmoniquement circonscrites réduites à deux droites. De même, un système de deux points conjugués à une conique peut être regardé comme conique harmoniquement inscrite réduite à deux points. Ces deux remarques sont fondamentales dans cette théorie. Si, par exemple, on veut construire une conique du système qui nous occupe réduite à deux points, il suffira de prendre deux points conjugués à la conique triple; et si les deux points coïncident, il suffira de prendre un point de cette courbe [1]. Un cercle du système s'obtiendra en prenant arbitrairement le centre et pour rayon la puissance de première espèce du point choisi par rapport à la conique triple; réciproquement, tous les cercles ainsi construits avec une même conique font partie d'un système tangentiel du quatrième ordre.

94. Des remarques également importantes, et sur lesquelles il n'est pas inutile d'insister, sont les suivantes :

1° Une parabole harmoniquement inscrite à une conique admet ses asymptotes pour couple de droites conjuguées.

2° Lorsqu'une hyperbole équilatère et un cercle sont conjugués réciproques, celle des deux courbes qui est harmoniquement circonscrite passe par le centre de l'autre.

3° Corrélativement, lorsqu'un foyer d'une conique est sur le cercle orthoptique d'une autre et que ces deux coniques sont conjuguées réciproques, celle des deux qui est harmoniquement inscrite est tangente à la polaire de ce point par rapport à l'autre.

Il en résulte que toutes les paraboles d'un système tangentiel du quatrième ordre, lesquelles forment un système

---

[1] C'est ce que M. Smith démontre analytiquement (*Proceedings*, p. 91), après avoir également fait les remarques géométriques d'où nous déduisons cette propriété (p. 89, art. 3).

tangentiel du troisième ordre, admettent pour couple de droites conjuguées les asymptotes de la conique triple.

Si, parmi les courbes du système, on considère celles qui ont pour foyer un point donné, elles forment un réseau tangentiel, puisqu'elles satisfont à trois conditions tangentielles; mais si le foyer est sur le cercle orthoptique de la conique triple, en vertu de la troisième remarque, ce réseau est particulier, car toutes les courbes ont une tangente commune, savoir la polaire du point considéré par rapport à la conique triple.

Si l'on considère toutes les courbes du système qui sont vues d'un point donné sous un angle droit, elles forment un système du troisième ordre.

Si ce point est un foyer de la conique triple, en vertu de la même remarque, ce système est particulier, car toutes ses courbes ont une tangente commune, qui est la directrice correspondante.

Nous avons vu que si la conique triple est un cercle, le système est particulier, et la condition à laquelle satisfont ses courbes est la puissance de seconde espèce d'un point; tous les cercles orthoptiques ont même centre radical, ce qui n'a lieu généralement que pour un réseau tangentiel. En particulier, cette puissance peut être nulle; ces cercles ont alors un point commun. En vertu de la seconde remarque, le cercle est dans tous les cas le lieu des centres des hyperboles équilatères du système.

Si c'est une hyperbole équilatère, un point quelconque ne peut plus être pris pour centre d'un cercle du système, puisqu'on ne peut pas inscrire dans l'hyperbole un triangle dont elle ne renferme pas le point de rencontre des hauteurs, et, en vertu de la même remarque, le lieu de leurs centres est l'hyperbole équilatère elle-même : le centre étant choisi, le rayon est alors indéterminé.

Si elle est réduite à deux droites confondues, les courbes du système auront une tangente commune.

DEUXIÈME CAS. — *Un faisceau ponctuel contravariant d'un système tangentiel du troisième ordre.*

95. Dans ce cas, les trois couples de droites conjuguées aux courbes du second système (60) sont précisément les trois couples formant coniques du premier (93), de telle sorte que la recherche des trois couples de droites conjuguées à quatre coniques données n'est autre que la recherche des points communs à deux autres coniques harmoniquement circonscrites aux premières : elle n'est pas possible linéairement [1].

Si c'est le système ponctuel qui est donné, on en conclura le second en construisant quatre coniques quelconques harmoniquement inscrites à deux coniques du premier ; par exemple, quatre systèmes de deux points, en coupant par quatre droites quelconques les deux coniques données ; si c'est le second, le premier sera déterminé par deux coniques quelconques harmoniquement circonscrites à quatre coniques du second : nous résoudrons ces problèmes plus loin.

Une droite quelconque coupe les courbes du premier faisceau suivant des points en involution linéaire, ce qui prouve qu'il y a sur une droite quelconque deux points réels ou imaginaires formant conique du second. Si la droite passe par l'un des points communs aux courbes du premier, les deux points conjugués communs à ces courbes, situés sur elles, se confondent. Il y a donc quatre points, réels ou imaginaires, qui forment individuellement conique du second système ; ce sont les quatre points communs aux trois couples de droites conjuguées [2].

L'hyperbole équilatère du faisceau ponctuel est le lieu

---

(1) SMITH, *Proceedings*, p. 92.
(2) *Ibid.*, p. 92.

des centres des cercles du second, lesquels satisfont à quatre conditions, mais ne forment pas système, car la condition d'être un cercle est une condition ponctuelle double (17).

Toutes les paraboles du second système forment un réseau dont deux conditions déterminantes sont deux couples de droites conjuguées, savoir les asymptotes de deux des coniques du premier, et la troisième une tangente commune à l'infini (94).

96. S'il y a un cercle dans le faisceau ponctuel, une des conditions déterminantes du second système est la puissance d'un point. Ce cercle est alors le lieu des centres des hyperboles équilatères de ce système (94). S'il y en a deux, c'est-à-dire si c'est un faisceau ponctuel de cercles, les deux conditions sont les puissances de deux points; les cercles orthoptiques du second système ont par suite même axe radical, et le lieu des centres des coniques de ce système est une droite. A chaque centre correspond une infinité de coniques ayant toutes même cercle orthoptique; les centres des hyperboles équilatères sont les deux points communs aux cercles du faisceau ponctuel.

Si le faisceau ponctuel est un faisceau d'hyperboles équilatères, un cercle du second ne peut avoir son centre qu'en un de leurs points communs (94), et ce centre étant choisi, le rayon du cercle demeure indéterminé; cela arrive lorsque les trois couples de droites conjuguées sont rectangulaires.

Le faisceau ponctuel peut se composer de toutes les courbes formées par une droite fixe et une droite variable passant par un point fixe. Les courbes du second sont alors conjuguées à deux couples de droites dans lesquelles une même droite fait partie des deux couples; il faut alors nécessairement que le point fixe soit par rapport à elles le pôle de la droite fixe.

Il peut se faire que deux des droites formant conique du

faisceau ponctuel coïncident, et que celui-ci se compose de toutes les coniques tangentes à deux droites données en des points donnés. Les courbes du second système sont alors tangentes à cette droite qui détermine les points de contact des courbes du premier. Si cette droite unique, formant couple de droites conjuguées, est parallèle à l'une des bissectrices de l'autre couple, auquel cas il y a un cercle dans le faisceau ponctuel, les deux conditions déterminant le second système sont alors une tangente et la puissance d'un point (95). Si les droites SA, SB (*fig.* 16) joignent le point S aux points circulaires de l'infini, les courbes du

Fig. 16.

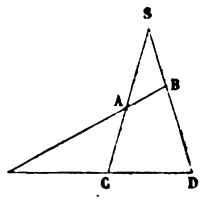


Fig. 17.

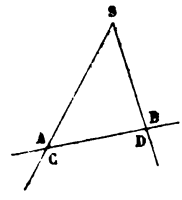
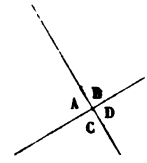


Fig. 18.



faisceau ponctuel ont le point S pour foyer et la droite AB pour directrice correspondante; celles du second système sont tangentes à la droite AB (*fig.* 17) et vues du point S sous un angle droit.

S'il arrive également que deux autres droites coïncident, les courbes du second système admettent alors deux tangentes communes (*fig.* 18) et les courbes du premier sont tous les couples de rayons conjugués du faisceau en involution linéaire dont les deux droites restantes sont les rayons doubles. Ces deux droites peuvent joindre un point donné aux points circulaires de l'infini, alors les courbes du second système ont pour foyer un point donné, et celles du premier sont tous les couples de droites rectangulaires issues de ce point.

Si l'une des tangentes communes est à l'infini, on a un système de paraboles.

TROISIÈME CAS. — *Un réseau ponctuel contravariant d'un réseau tangentiel.*

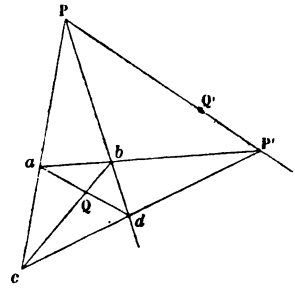
97. Ce cas est le plus symétrique et donne lieu dans chaque système à des propriétés corrélatives, puisque les deux systèmes sont du même ordre. La Cayleyenne du réseau ponctuel est l'enveloppe des droites sur lesquelles se trouvent deux points conjugués communs à toutes les courbes du réseau (19), et ces deux points forment une conique harmoniquement inscrite à toutes ces courbes (93), par conséquent le lieu de ces points conjugués est le lieu des coniques du réseau tangentiel contravariant réduites à deux points, c'est-à-dire précisément la Hessienne de ce second réseau (51). Ainsi l'on peut énoncer ce théorème :

THÉORÈME. — *Lorsque deux réseaux sont contravariants, la Cayleyenne du réseau ponctuel est l'enveloppe des coniques du réseau réduites à deux droites, et la Hessienne du réseau tangentiel est le lieu des coniques du réseau réduites à deux points. La seconde courbe peut aussi être considérée comme le lieu des couples de points conjugués communs à toutes les coniques du premier réseau, et la première comme l'enveloppe des couples de droites conjuguées communes à toutes les coniques du second.*

98. Soient P et P′ (*fig.* 19) deux points conjugués de la Hessienne : de même que sur chaque tangente de la Cayleyenne il y a deux points conjugués aux coniques du premier réseau, de chaque point de la Hessienne partent deux droites conjuguées à celles de second. Soient P′ab, P′cd, et Pac, Pbd les deux couples issus des points P et P′ : d'après le théorème de Hesse (10), si ces deux couples se coupent en a, b, c, d, les droites ad, bc seront aussi deux tangentes conjuguées de la Cayleyenne, et leur point d'intersection Q sera par suite sur la Hessienne. Si l'on applique la règle

donnée (50) pour déterminer le point Q′ conjugué de Q, l'on voit qu'il faut joindre QP′, tracer sa conjuguée harmonique par rapport au couple P′, de même pour le couple P, ce qui donne le troisième point d'intersection de la

Fig. 19.



droite PP′ et de la Hessienne. De plus, si l'on joint le point P à deux points conjugués quelconques R et R′, les droites PR, PR′ sont conjuguées harmoniques par rapport aux droites P*ac*, P*bd* (51). Si le point R′ s'approche indéfiniment sur la courbe du point P′ conjugué de P, le point R s'approche indéfiniment du point P, et la droite PR, tangente alors en P à la Hessienne, est la conjuguée harmonique de PP′ par rapport au couple P*ac*, P*bd*; c'est-à-dire la droite PQ. De même la tangente en P′ est la droite P′Q. Ce qui permet d'énoncer les théorèmes suivants :

Théorème. — *Les tangentes à la Hessienne en deux points conjugués se coupent en un point de la courbe, qui est le conjugué du troisième point d'intersection avec la courbe de la droite qui joint les deux points considérés* (1).

(1) Hesse, *Uber Curven dritten Ordnung* (*Crelle's Journal*, t. XXXVI) et Cremona, *Introduzione, etc.*, p. 108. C'est au moyen de ce théorème que Hesse démontre que toute courbe du troisième degré peut être considérée de trois façons différentes comme la Hessienne d'un réseau, car d'un point de la courbe on peut lui mener quatre tangentes, dont les points de contact peuvent être combinés deux à deux de trois manières différentes pour

Corrélativement :

THÉORÈME. — *Les points de contact de deux tangentes conjuguées de la Cayleyenne sont situés sur une troisième tangente, qui est la conjuguée de la troisième tangente que l'on peut mener à la courbe par le point de rencontre des deux tangentes considérées.*

THÉORÈME. — *La tangente en un point de la Hessienne est la droite conjuguée harmonique par rapport aux deux droites conjuguées qui se coupent en ce point de celle qui joint le point considéré à son conjugué.*

Corrélativement :

THÉORÈME. — *Le point de contact d'une tangente de la Cayleyenne est conjugué harmonique par rapport aux deux points conjugués situés sur elle, de celui où elle rencontre sa conjuguée* (1).

Si nous considérons une tangente quelconque PP′ de la Cayleyenne, il résulte d'un théorème précédent (97) que deux de ses points d'intersection avec la Hessienne sont les points P et P′ situés sur elle, conjugués communs à toutes les courbes du réseau ponctuel. Le troisième point d'intersection est évidemment le point où elle rencontre la seconde tangente de la Cayleyenne, qui forme avec elle conique du réseau ponctuel et qui est sa conjuguée, puisque la Hessienne est le lieu des centres des systèmes de deux droites formant coniques du premier réseau (51), ce qui prouve que la droite conjuguée de PP′ la coupe au point Q′ conjugué de Q. Donc :

THÉORÈME. — *Les trois points d'intersection d'une tan-*

---

former un couple de points conjugués, lequel peut alors servir à déterminer tous les autres si la courbe est décrite. Si elle ne l'est pas, nous avons donné le moyen de la décrire, étant connus trois couples (19). Enfin l'on voit par là que si la courbe est déterminée par neuf points, la recherche de leurs conjugués sera un problème du troisième degré et ne sera pas de nature à en simplifier la construction.

(1) CAYLEY, *A Memoir on curves of the third order*, p. 425.

gente à la Cayleyenne avec la Hessienne sont les points conjugués communs au premier réseau situés sur elle, et le point où elle rencontre sa conjuguée.

Corrélativement :

THÉORÈME. — *Les trois tangentes à la Cayleyenne issues d'un point de la Hessienne sont les droites conjuguées communes au second réseau qui se coupent en ce point, et la droite qui joint ce point à son conjugué* (1).

Ces deux théorèmes complètent les deux précédents et font voir que sur chaque tangente à la Cayleyenne il y a quatre points en proportion harmonique, les deux points conjugués, le troisième point d'intersection avec la Hessienne et le point de contact. De même pour les quatre droites corrélatives issues de chaque point de la Hessienne.

Il est facile de construire autrement le point de contact d'une tangente de la Cayleyenne, et d'une façon plus commode si les deux points conjugués situés sur elle sont imaginaires. Considérons en effet la droite PP′ qui joint le point P à son conjugué P′; cette tangente rencontre sa conjuguée en un certain point Q′, et ces deux droites formant conique du réseau ponctuel doivent couper la tangente P*bd* en deux points conjugués harmoniques par rapport aux deux points conjugués situés sur elle (19); l'un de ces points étant le point P, l'autre sera le conjugué harmonique de P par rapport à ces deux points, c'est-à-dire le point de contact. Donc :

THÉORÈME. — *On peut obtenir le point de contact d'une tangente* P*bd de la Cayleyenne en cherchant le point* P *où elle rencontre sa conjuguée, et joignant ce point à son conjugué* P′ *par une droite* PP′ *dont la conjuguée rencontre la tangente considérée au point de contact.*

(1) CREMONA, *Introduzione, etc.*, p. 109.

Corrélativement :

THÉORÈME. — *On peut obtenir la tangente en un point* P *de la Hessienne en joignant ce point à son conjugué* P′ *par une droite qui rencontre sa conjuguée en un certain point* Q′ *dont le conjugué est sur la tangente cherchée.*

Ce procédé sert lorsque les deux droites conjuguées issues du point P sont imaginaires.

99. Si l'on construit les points P′ et Q′ conjugués de deux points donnés P et Q de la Hessienne, on obtiendra un quadrilatère dont les deux autres sommets R et R′ appartiendront également à la Hessienne d'après le théorème de Hesse, mais l'un d'eux est sur la droite PQ qui joint les deux points donnés. L'on peut donc dire que :

THÉORÈME. — *Si trois points de la Hessienne sont en ligne droite, leurs points conjugués forment un triangle dont les trois côtés passent respectivement par ces trois points* (1).

Corrélativement :

THÉORÈME. — *Si trois tangentes de la Cayleyenne passent par un même point, leurs conjuguées forment un triangle dont les sommets sont situés respectivement sur ces trois droites.*

Enfin il est évident que si l'on considère un faisceau quelconque faisant partie du réseau ponctuel, les six cordes communes aux coniques du faisceau seront tangentes à la Cayleyenne, et les sommets du triangle conjugué commun seront sur la Hessienne. De même, si l'on considère un faisceau du réseau tangentiel, les six ombilics communs aux coniques du faisceau seront sur la Hessienne et les côtés du triangle conjugué commun seront tangents à la Cayleyenne.

Les détails qui précèdent suffisent pour faire l'épure et

(1) HESSE, *Uber Curven dritten Ordnung*, et CREMONA, *Introduzione, etc.*, p. 109.

construire les deux courbes lorsqu'on en connaît les éléments, qui sont au nombre de neuf, points de l'une, ou tangentes de l'autre, ou éléments mêlés, car l'une des courbes entraîne l'autre. Par exemple, trois couples de points conjugués, déterminant le réseau ponctuel, fournissent six points de la Hessienne et trois tangentes de la Cayleyenne. Trois couples de droites conjuguées, déterminant le réseau tangentiel, fournissent immédiatement six tangentes de la Cayleyenne et trois points de la Hessienne [1]. Ces trois couples de droites forment trois coniques du réseau ponctuel, qui se trouve par là même déterminé. Mais on peut varier les données d'une infinité de manières, et nous verrons tout à l'heure quelles sont celles que nous avons trouvé le plus commode de choisir pour l'exécution de l'épure (*Pl. II*).

Si, par exemple, l'on se donne le quadrilatère des quatre tangentes communes aux courbes d'un faisceau du réseau tangentiel, les extrémités d'une même diagonale seront sur la Hessienne; on en connaît donc six points, mais qui n'en forment que quatre distincts (10); de même, on connaît trois tangentes de la Cayleyenne, dont l'une résulte des deux autres, et qui sont les diagonales du quadrilatère; on se donne donc en tout six conditions. De même pour le quadrilatère des quatre points communs aux courbes d'un faisceau du réseau ponctuel.

---

[1] On peut se demander comment il se fait qu'il ne faille que neuf conditions pour déterminer l'un des systèmes et l'autre qui en résulte, puisqu'il faut trois coniques pour déterminer l'un d'eux. Mais il faut remarquer que chacune de ces courbes est soumise à une indétermination du second ordre, ce qui réduit à trois le nombre des conditions qui la déterminent isolément. En général, un système d'ordre n est déterminé par $n+1$ coniques dont l'indétermination est d'ordre n; il faudra donc, pour la connaissance complète du système $5(n+1)-n(n+1)$ ou $(5-n)(n+1)$ conditions. Comme vérification, pour $n=0$ ou $n=4$ on doit trouver 5; pour $n=1$ ou $n=3$ on doit trouver le même nombre; enfin, pour $n=2$ on doit trouver 9; c'est en effet ce qui a lieu.

100. Si l'on coupe la Hessienne par une droite quelconque, on obtient le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Il existe sur une droite quelconque trois points tels que chacun d'eux est un des points doubles de l'involution linéaire déterminée par une certaine droite passant par ce point dans toutes les coniques d'un réseau ponctuel.*

Ou encore :

Tels que de chacun d'eux on peut mener à toutes les coniques d'un réseau tangentiel des tangentes formant un faisceau en involution linéaire.

Corrélativement :

THÉORÈME. — *Par un point quelconque du plan passent trois droites, telles que chacune d'elles est un des rayons doubles du faisceau en involution linéaire obtenu en menant par un certain point de cette droite des tangentes à toutes les coniques d'un réseau tangentiel.*

Ou encore :

Telles que chacune d'elles coupe, suivant une involution linéaire, toutes les coniques d'un réseau ponctuel.

Si, dans le premier énoncé, l'on suppose la droite à l'infini, il devient :

THÉORÈME. — *Il y a trois droites qui déterminent dans toutes les coniques d'un réseau ponctuel des cordes ayant même point milieu. Ce sont les directions asymptotiques de la Hessienne, et les couples de tangentes parallèles à l'une de ces directions, menées aux courbes du réseau tangentiel, forment un faisceau en involution linéaire.*

Les trois points d'intersection d'une droite quelconque avec la Hessienne sont les points où elle rencontre les trois autres tangentes communes à toutes les courbes du réseau tangentiel, qui sont tangentes à la droite considérée. Par suite :

THÉORÈME. — *Les directions asymptotiques de la Hessienne sont données par les trois tangentes communes aux paraboles du réseau tangentiel.*

Les asymptotes elles-mêmes se détermineront par le procédé général qui donne la tangente en un point quelconque (98).

101. Les données qui précisent le plus nettement la forme d'une courbe sont en général ses directions asymptotiques, et comme ici leur détermination linéaire n'est pas possible lorsque l'on se donne, par exemple, trois couples de points ou trois couples de droites conjugués, nous nous sommes donné, pour exécuter l'épure (*Pl. II*) [1], le triangle des trois tangentes communes aux paraboles du réseau tangentiel, triangle qui forme avec la droite de l'infini le quadrilatère des tangentes communes aux courbes d'un faisceau du réseau et équivaut conséquemment à six conditions (99). Les six points de la Hessienne sont les trois sommets du triangle et les trois points situés à l'infini sur chaque côté, et les trois tangentes de la Cayleyenne sont les trois parallèles menées respectivement par chaque sommet au côté opposé. Pour compléter les neuf conditions nécessaires, nous nous sommes donné en outre un couple de points conjugués, ce qui fait deux points et une tangente. Le reste de l'épure s'en déduit facilement : le cercle du réseau ponctuel, par exemple, est le cercle qui a pour centre le point de rencontre des hauteurs du triangle des tangentes communes aux paraboles du réseau tangentiel (88), et qui coupe orthogonalement le cercle ayant pour diamètre le segment formé par le couple donné (20). De même, pour tous les éléments que l'on peut construire par la règle et le compas.

---

(1) Légende de la planche II :

AB, BC, CA,	Tangentes communes aux paraboles du réseau.
A_c, B_c, C_c,	Points de contact des deux courbes.
A_i, B_i, C_i,	Points d'inflexion de la Hessienne.
A_r, B_r, C_r,	Points de rebroussement de la Cayleyenne.
$\widehat{A}$	Angle de deux droites conjuguées.
--------	Segment formé par deux points conjugués.

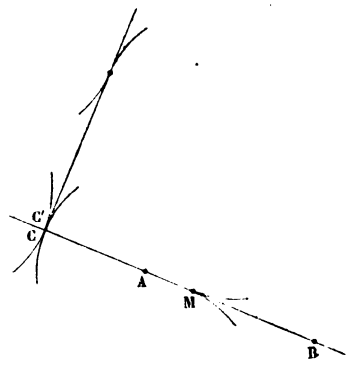
102. Il nous reste à parler de certains points ou tangentes singuliers de nos deux courbes. Nous avons vu (98) comment on trouve le point de contact d'une tangente à la Cayleyenne. Il s'ensuit que les deux courbes sont nécessairement tangentes, car la tangente à la Cayleyenne en un de leurs points communs M coupe la Hessienne en deux autres points A et B. Si ce sont les deux points conjugués situés sur cette tangente, le point de contact M étant conjugué harmonique du troisième point d'intersection M par rapport au couple AB, il faut que le point M coïncide avec l'un des points A et B, c'est-à-dire que la droite considérée soit tangente à la Hessienne au point M. Si les deux points conjugués communs situés sur la tangente considérée sont M et A, il faut que le point de contact M soit conjugué harmonique de B par rapport au couple MA, c'est-à-dire que M coïncide avec B, ce qui conduit au même résultat et fait voir qu'un point de contact des deux courbes est tel que la droite qui le joint à son conjugué, laquelle est la tangente commune, rencontre sa conjuguée précisément en ce point. Corrélativement, il ne peut pas y avoir de tangente commune aux deux courbes pour laquelle les points de contact soient différents, et une tangente commune est telle que son point d'intersection avec sa conjuguée étant joint à son conjugué donne précisément la droite considérée.

La Cayleyenne étant du sixième degré, les deux courbes doivent avoir dix-huit points d'intersection, et conséquemment neuf points de contact, mais nous allons voir qu'il y en a toujours six qui sont imaginaires.

De même, en effet, que la Hessienne a neuf points d'inflexion dont six sont toujours imaginaires et les trois autres en ligne droite, la Cayleyenne a neuf points de rebroussement dont six sont toujours imaginaires, et les trois autres tangentes de rebroussement ont un point commun. Considérons alors un point de rebroussement réel M (*fig.* 20) et

la tangente en ce point; cette droite rencontre la Hessienne en trois points dont deux A et B sont conjugués et l'autre C est celui où elle rencontre sa conjuguée (98).

Fig. 20.

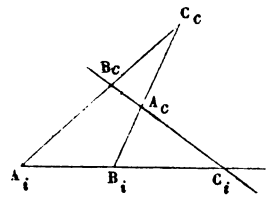


Mais le caractère du point de rebroussement est que, si la tangente en ce point roule infiniment peu sur la courbe, le point de contact reste toujours le même, et elle demeure tangente de rebroussement. Mais alors le point C vient en C′, et la conjuguée de la tangente de rebroussement est la droite CC′, c'est-à-dire la tangente en C à la Hessienne; mais cette droite étant conjuguée de la tangente de rebroussement est aussi tangente à la Cayleyenne, c'est donc une tangente commune, et le point de contact commun est en C. Ainsi, à un point de rebroussement correspond un point de contact, et la droite qui les joint est la tangente de rebroussement correspondante. Il y a donc toujours six points de contact imaginaires. Corrélativement, chaque tangente commune passe par un point d'inflexion de la Hessienne, qui est le conjugué du point de contact, et sa conjuguée, qu'elle rencontre au point de contact, est la tangente de rebroussement correspondante. De telle sorte qu'un point de contact des deux courbes est toujours le point de contact avec la Hessienne d'une tangente menée à cette courbe par

le point d'inflexion correspondant, ou encore un des points d'intersection avec la Cayleyenne de la tangente de rebroussement correspondante. On peut résumer ces propriétés par le théorème suivant :

THÉORÈME. — *La Hessienne et la Cayleyenne de deux réseaux contravariants ont neuf points de contact dont six sont toujours imaginaires. Les points d'inflexion, de contact et de rebroussement se correspondent. Une tangente de rebroussement passe par le point de contact correspondant, là elle rencontre sa conjuguée qui est la tangente commune, laquelle passe par le point d'inflexion correspondant, qui est le conjugué du point de contact* (¹).

Fig. 21.



103. Soient A_i, B_i, C_i (*fig.* 21) les points d'inflexion qui sont en ligne droite, A_c, B_c, C_c les points de contact, et A_r, B_r, C_r les points de rebroussement. L'on voit ainsi que la droite A_rA_c est tangente de rebroussement, et la

(¹) M. Cremona démontre également que la Hessienne et la Cayleyenne sont tangentes entre elles aux neuf points conjugués des points d'inflexion de la Hessienne (*Introduzione, etc.*, p. 116). Il traite très-élégamment toute cette théorie en considérant la Hessienne comme le lieu des centres des couples de droites formant conique polaire d'une courbe du troisième degré qu'il appelle la courbe fondamentale et la Cayleyenne comme l'enveloppe des droites qui joignent deux points conjugués de la Hessienne; le réseau ponctuel intervient alors comme l'ensemble des coniques polaires de la courbe fondamentale : ainsi, il ne fait pas intervenir de réseau tangentiel. Toutefois, nous croyons, avec M. Smith (*Proceedings*, n° 14, p. 93), que les relations qui existent entre deux réseaux contravariants offrent le moyen le plus naturel d'expliquer les propriétés remarquables dont jouissent ces deux courbes, l'une par rapport à l'autre.

droite $A_e A_i$ tangente commune. Les trois points d'inflexion sont les trois points où la droite qui les joint rencontre les trois droites qui sont tangentes à toutes les coniques du réseau tangentiel admettant aussi la première pour tangente commune (51). Cherchons ces trois droites : elles forment avec la droite d'inflexion un quadrilatère complet, dans lequel le sommet opposé à l'un des points d'inflexion est le conjugué de ce point (99); donc les trois autres sommets du quadrilatère complet sont A_e, B_e, C_e (102), ce qui fait voir que non-seulement la tangente commune au point de contact A_e passe par le point d'inflexion A_i, mais encore la droite $B_e C_e$ qui joint les deux autres points de contact réels. Il y a donc trois couples particuliers de droites issus de chaque point d'inflexion : 1° les deux droites conjuguées issues de ce point comme de tout point de la Hessienne; 2° la droite d'inflexion $A_i B_i C_i$ et la droite qui joint les points de contact qui ne correspondent pas au point d'inflexion considéré. Ces deux droites sont conjuguées harmoniques par rapport aux deux premières, puisqu'elles ne sont pas tangentes à une seule conique du réseau tangentiel, mais à toutes celles d'un faisceau; 3° la tangente commune au point de contact correspondant et la tangente d'inflexion à la Hessienne qui sont aussi conjuguées harmoniques par rapport au premier couple, puisque la tangente commune joint le point d'inflexion à son conjugué (98). Enfin la droite d'inflexion et les côtés du triangle des trois points de contact forment les quatre tangentes communes d'un faisceau du réseau tangentiel.

Corrélativement, il y a sur chaque tangente de rebroussement trois couples particuliers de points, qui sont : 1° les deux points conjugués situés sur cette tangente comme sur toutes les tangentes de la Cayleyenne; 2° le point de rencontre des tangentes de rebroussement et le point d'intersection des deux tangentes communes qui ne correspondent pas à la tangente de rebroussement; ces deux points sont

conjugués harmoniques par rapport aux deux premiers; 3° le point de contact correspondant et le point de rebroussement qui sont aussi conjugués harmoniques par rapport au premier couple (98). Enfin le point de rencontre des tangentes de rebroussement et les trois points de contact sont les sommets d'un faisceau du réseau ponctuel. L'examen de l'épure achèvera de rendre claires et précises ces remarquables propriétés.

104. Le cercle du réseau ponctuel est le cercle orthogonal commun aux cercles orthoptiques de toutes les courbes du réseau tangentiel (88); ce qui est évident d'ailleurs puisqu'il coupe orthogonalement les cercles ayant pour diamètres les segments dont les extrémités sont les couples de points conjugués communs aux courbes du premier réseau, c'est-à-dire les cercles orthoptiques des coniques du second réduites à deux points. Cette propriété va nous fournir une construction simple de la conique conjuguée à cinq couples de droites, laquelle pourra remplacer au besoin la construction déjà simple donnée plus haut (47), parce qu'elle n'exige la construction d'aucune conique auxiliaire.

105. Problème. — *Construire la conique conjuguée à cinq couples de droites.*

Soient P_1Q_1, P_2Q_2,..., P_5Q_5, les cinq couples donnés, et S_1, S_2,.., S_5, leurs sommets (41). Considérons les trois premiers, par exemple : ils donnent lieu à un réseau tangentiel et sur chacune des six droites P_1, Q_1, P_2, Q_2, P_3, Q_3, il y a deux points formant coniques du réseau (97); soient a et b les deux points situés sur P_1 : nous savons aussi que S_2a et S_2b sont conjuguées harmoniques par rapport au couple P_2Q_2, et S_3a, S_3b par rapport au couple P_3Q_3. Donc les points a et b sont les points doubles de l'involution linéaire déterminée par ces deux couples sur la droite P_1 et peuvent se construire facilement : de même pour chacune des cinq autres droites. Les cercles ayant pour dia-

mètres les six segments tels que *ab* auront même centre radical, centre du cercle du réseau ponctuel contravariant du réseau tangentiel défini par les trois couples considérés, ce qui donne lieu à ce théorème de géométrie élémentaire.

THÉORÈME. — *Étant donnés trois couples de droites, chacune des six droites donne lieu à une involution linéaire, par ses points d'intersection avec les deux couples dont elle ne fait pas partie. Les six cercles ayant pour diamètres les segments formés par les points doubles de ces six involutions ont même centre radical.*

Et ce qui permet de construire au moyen de trois de ces cercles leur cercle orthogonal commun, qui est le cercle du réseau ponctuel et, par suite, harmoniquement circonscrit à la conique cherchée, laquelle fait partie du second.

Si l'on agit de même pour trois autres couples, par exemple P_2Q_2, P_3Q_3, P_4Q_4, on aura un second cercle, et ainsi de suite en les combinant trois à trois, de toutes les manières possibles dont le nombre est égal à dix. Ces dix cercles, comme le premier, sont harmoniquement circonscrits à la conique cherchée; ils ont donc même centre radical, et leur cercle orthogonal commun, qui sera déterminé par trois d'entre eux, sera le cercle orthoptique de la conique cherchée (86). On peut donc ainsi compléter le théorème précédent :

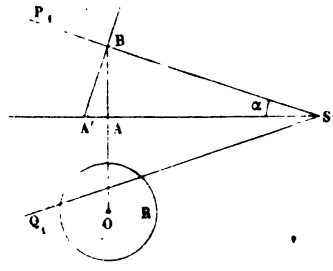
THÉORÈME. — *Les dix cercles obtenus de cette manière en combinant trois à trois cinq couples quelconques ont aussi même centre radical.*

Enfin on pourra construire facilement les quatre tangentes de la conique, qui résultent du fait qu'elle appartient au faisceau tangentiel déterminé par le cercle orthoptique et un des cinq couples donnés. Si l'on considère en effet le cercle tangent aux deux droites P_1 et Q_1, et coupant orthogonalement le cercle orthoptique qu'on a construit, ce cercle est harmoniquement circonscrit à la conique (85),

par conséquent la conique est l'enveloppe des droites telles que, de leur pôle par rapport à ce cercle, on peut mener à elle et à ce cercle des tangentes en proportion harmonique (66). Mais puisque le cercle est tangent à P_1 et à Q_1, qui sont conjuguées à la conique, cette proportion a lieu pour les tangentes issues à ces deux courbes du point S_1 d'intersection de P_1 et de Q_1; donc la polaire du point S_1 par rapport à ce cercle est tangente à la conique.

106. Analysons le problème, et soient tracés les deux droites P_1 et Q_1 (*fig.* 22) et le cercle orthoptique; soient

Fig. 22.



S_1A la bissectrice de l'angle $P_1S_1Q_1$ égal à 2α et AB la perpendiculaire abaissée du point O sur cette bissectrice; soit O' le centre cherché sur S_1A; on devra avoir

$$\overline{S_1O'}^2 \sin^2\alpha = \overline{OO'}^2 - R^2 = \overline{OA}^2 + (S_1O' - S_1A)^2 - R^2;$$

$\overline{OA}^2 - R^2$ est le carré t^2 de la tangente menée du point A au cercle O. On aura alors

$$\overline{S_1O'}^2 \cos^2\alpha - 2S_1O'.S_1A + \overline{S_1A}^2 + t^2 = 0,$$

d'où l'on tire pour S_1O' deux valeurs, symétriques par rapport au point A', où la perpendiculaire élevée sur S_1B au point B coupe la bissectrice, et faciles à construire. Ces valeurs sont réelles si l'on a $AB > t$. Mais remarquons que ce que nous cherchons, c'est la polaire du point S_1 par

rapport à ce cercle, laquelle sera perpendiculaire à $S_1 A'$ et à une distance du point S_1 égale à $\overline{S_1 O'} \cos^2 \alpha$.

On peut tout de suite tirer de la relation précédente les valeurs de $\overline{S_1 O'} \cos^2 \alpha$, elles sont symétriques par rapport au point A et égales à $S_1 A \pm \sqrt{\overline{S_1 A}^2 \sin^2 \alpha - t^2 \cos^2 \alpha}$.

On aura ainsi les tangentes à la conique perpendiculaires à la bissectrice $S_1 A$; les deux autres tangentes du faisceau tangentiel déterminé par le cercle orthoptique O et le couple $P_1 Q_1$ seront les tangentes perpendiculaires à l'autre bissectrice; elles forment un rectangle circonscrit à la courbe et inscrit conséquemment dans le cercle O, de sorte que les deux premières donneront immédiatement les deux autres, si elles rencontrent le cercle. Elles seront imaginaires, s'il n'y a pas de tangentes à la courbe perpendiculaires à cette bissectrice, et la construction ne sera plus applicable; mais nous avons cinq couples et par suite dix bissectrices; par suite, le cas où il n'y aurait de tangentes parallèles à aucune de ces dix droites peut être considéré comme très-particulier.

Cette solution, dont l'exposition a été longue, est néanmoins excessivement simple eu égard à la difficulté inhérente à la nature du problème ; on s'en assurera en faisant l'épure.

Tous les problèmes déjà traités et où la conique est assujettie à cinq conditions tangentielles données directement peuvent alors être considérés comme des cas particuliers du précédent.

107. Revenons à nos deux réseaux contravariants. Nous avons vu que le cercle du premier coupe orthogonalement les cercles ayant pour diamètres les segments formés par les coniques du second réduites à deux points. Corrélativement, il y a une conique du second ayant pour foyer un point donné, et le cercle ayant son grand axe pour diamètre coupe orthogonalement tous les cercles déduits du

point donné et des coniques du premier réduites à deux droites ainsi que nous l'avons expliqué (59).

Nous avons vu aussi qu'il y a quatre cercles dans le second (80) dont les centres sont les quatre points communs aux hyperboles équilatères du premier; ce sont les sommets d'un triangle et le point de rencontre des hauteurs; ils sont harmoniquement inscrits à un même cercle qui est le cercle du premier réseau; donc ce dernier coupe orthogonalement leurs cercles orthoptiques (66) qui sont les quatre cercles respectivement concentriques et dont les rayons respectifs sont ceux des premiers multipliés par $\sqrt{2}$: ce qui donne le moyen de déduire le rayon d'un de ces quatre cercles de ceux des trois autres. Il suffira de décrire les cercles respectivement concentriques aux trois autres avec des rayons égaux aux premiers multipliés par $\sqrt{2}$, et leur cercle orthogonal commun. Le cercle orthoptique du cercle cherché devra couper ce dernier orthogonalement. Cette remarque nous sera particulièrement utile dans l'application aux surfaces du second degré.

Corrélativement, il y a dans le premier réseau quatre coniques dont un point donné est le foyer, et les polaires du point donné par rapport à chacune d'elles, c'est-à-dire les directrices correspondantes, sont les quatre tangentes d'un faisceau tangentiel, dont le point donné est un sommet orthoptique (40). Énonçons le théorème :

Théorème. — *Il y a quatre coniques conjuguées à trois couples de points et ayant pour foyer un point* F; *les quatre directrices correspondantes forment un quadrilatère dont le point* F *est un sommet orthoptique.*

Le cercle du premier réseau est le lieu des centres des hyperboles équilatères du second; corrélativement, la conique du second, qui a pour foyer un point donné, est l'enveloppe des polaires de ce point par rapport aux courbes du premier qui sont vues de ce point sous un angle droit.

108. Telles sont les remarquables propriétés de ces deux systèmes de coniques; nous allons terminer leur exposé en faisant voir les analogies que chacun d'eux présente, en effet, isolément (70) avec le système des segments formant une proportion harmonique sur une droite avec un segment fixe, c'est-à-dire avec l'involution linéaire.

Les propriétés de l'involution linéaire sont en effet les suivantes :

1° Les segments formés par deux points conjugués quelconques sont en proportion harmonique avec le segment fixe des deux points doubles;

2° Les cercles décrits sur ces segments comme diamètres coupent orthogonalement le cercle ayant pour diamètre le segment des points doubles;

3° Le produit des distances du milieu de ce segment aux extrémités de tous les autres est constant;

4° Si les points doubles sont imaginaires, il y a deux points d'où l'on voit sous un angle droit tous les segments dont les extrémités sont deux points conjugués.

Considérons d'abord les courbes du réseau ponctuel :

1° Toutes les courbes du réseau sont harmoniquement circonscrites à trois coniques fixes, coniques triples des involutions planes dont peuvent faire partie les triangles inscrits dans les premières. Ces trois coniques en entraînent une infinité d'autres, formant réseau tangentiel, parmi lesquelles il y a quatre cercles;

2° Un de ces quatre cercles, quelconque, coupe orthogonalement les cercles, lieux des pieds des perpendiculaires abaissées de son centre sur les cordes de chaque conique vues de ce point sous un angle droit (76);

3° La puissance de première espèce d'un quelconque de ces quatre centres par rapport à toutes les coniques du réseau est constante ;

4° A chacun de ces cercles, s'il est imaginaire, corres-

pondent deux points (qu'on obtient en élevant de part et d'autre du plan et au centre du cercle une perpendiculaire égale à la longueur géométrique de son rayon), d'où l'on voit toutes les courbes du réseau sous un cône équilatère de première espèce (73) [1].

Les courbes du réseau tangentiel donnent lieu aux mêmes analogies :

1° Toutes les courbes du réseau sont harmoniquement inscrites à trois coniques fixes, coniques triples des involutions planes dont peuvent faire partie les triangles circonscrits aux premières. Ces trois coniques en entraînent une infinité d'autres, formant réseau ponctuel, parmi lesquelles il y a un cercle;

2° Ce cercle coupe orthogonalement les cercles orthoptiques de toutes les courbes du réseau.

3° La puissance de seconde espèce de son centre par rapport à toutes les courbes du réseau est constante;

4° S'il est imaginaire, il y a deux points de l'espace d'où l'on voit toutes les courbes du réseau sous un cône équilatère de seconde espèce (88).

109. Nous allons examiner maintenant les cas particuliers auxquels peut donner lieu ce système de courbes en involution.

---

[1] Nous avons omis d'énoncer le théorème analogue relatif au faisceau ponctuel. Il est clair qu'alors il a lieu pour tous les points de l'hyperbole équilatère du faisceau et peut s'énoncer ainsi :

Si, d'un point, l'on voit sous un cône équilatère de première espèce deux coniques d'un faisceau ponctuel, il en est de même de toutes les autres. (Comptes rendus de la Société Philomathique, journal *l'Institut*, 20 décembre 1865.)

Nous aurons à revenir sur cette propriété remarquable, à propos du système de surfaces du second degré ayant huit points communs; car, si l'on considère qu'un pareil système est coupé par un plan suivant un faisceau ponctuel de coniques, on voit qu'elle est complétement analogue au théorème de Desargues-Sturm relatif aux cordes interceptées par une droite dans les coniques d'un faisceau ponctuel.

S'il arrive que les courbes du premier réseau aient un point commun P, nous avons vu qu'alors la Cayleyenne se réduit à ce point et à une conique déterminée par tangentes (24). Ce point a évidemment même puissance de première espèce par rapport aux coniques du réseau et cette puissance est nulle.

On peut donc dire qu'alors un des quatre cercles du second réseau se réduit à son centre (80). Une droite quelconque MP passant par le point a alors pour conjuguée une certaine tangente MQ de la conique (24) et ses trois points d'intersection avec la Hessienne sont le point M où elle rencontre sa conjuguée et les deux points conjugués situés sur elle (98), c'est-à-dire deux points confondus en P : il s'ensuit que la Hessienne a un point double en ce point, et il est facile de déterminer les tangentes aux deux branches de la courbe; car, pour que la droite MP soit tangente en ce point, il faut que le point M se confonde avec le point P, c'est-à-dire que la conjuguée de MP soit une des tangentes issues du point P à la conique (102), cette conjuguée est alors l'autre tangente. Les deux tangentes à la Hessienne au point P sont par conséquent les tangentes menées de ce point à la conique qui, avec le point P, constitue la Cayleyenne.

Corrélativement, si les courbes du second réseau ont une tangente commune, la Hessienne se réduit à cette droite et à une conique déterminée par points (56). Cette droite étant tangente à toutes les courbes du réseau peut être regardée comme une conique réduite à deux droites confondues, harmoniquement circonscrite à ces courbes. Il existe donc alors dans le premier réseau une conique réduite à deux droites confondues, ce qui n'a pas lieu généralement. On verrait facilement, par un raisonnement analogue au précédent, que la tangente commune est tangente à deux branches de la Cayleyenne et que les deux points de con-

tact sont ses points d'intersection avec la conique qui constitue avec elle la Hessienne (*Pl. III*).

Si la tangente commune est à l'infini, le second réseau ne renferme que des paraboles; la Hessienne se compose d'une conique unique à distance finie, et la Cayleyenne a deux branches paraboliques dans les directions des asymptotes de cette conique : le premier réseau est l'ensemble des courbes ayant respectivement les mêmes asymptotes que toutes celles d'un faisceau ponctuel. Pour que les deux points de contact sur la droite de l'infini soient les points circulaires de l'infini, il faut en outre que les deux couples donnés soient rectangulaires (56); le premier réseau est alors l'ensemble des hyperboles équilatères ayant les mêmes asymptotes que toutes celles d'un faisceau ponctuel d'hyperboles équilatères; la Hessienne est un cercle et la Cayleyenne est doublement tangente à la droite de l'infini aux points circulaires : c'est l'hypocycloïde à trois rebroussements engendré par un point d'un cercle qui roule dans un autre de rayon triple [1].

110. Si les courbes du premier réseau ont deux points communs A et B, la Cayleyenne se compose de ces deux points et d'un troisième point Q (25). D'ailleurs, la droite AB et une droite quelconque passant sur le point Q forment une conique du premier réseau; c'est donc un couple de droites conjuguées aux courbes du second (93), ce qui ne saurait avoir lieu, quelle que soit la droite menée par le point Q, à moins que ce point ne soit par rapport à elles le pôle de la droite AB. Le second réseau est donc l'ensemble des courbes par rapport auxquelles on connait le pôle Q d'une droite AB et un couple de droites conjuguées, car le premier réseau renferme aussi comme couple de droites

---

[1] Cremona, *Sur l'hypocycloïde à trois rebroussements* (*Journal de Crelle-Borchardt*, t. LXIV, p. 101).

deux droites passant respectivement par les points A et B et conjuguées au couple de points qui, avec les points A et B détermine ce système. De sorte qu'étant donnés le point Q et la droite AB ainsi qu'un couple de droites conjuguées pour déterminer le second, les deux points communs aux courbes du premier sont les points d'intersection de la droite AB avec les deux droites du couple. La Hessienne se compose alors de la droite AB sur laquelle il y a une infinité de couples de points conjugués communs aux courbes du premier réseau, et d'une conique, lieu des couples de points conjugués relatifs aux droites issues du point Q. Cette conique est aussi le lieu des points de contact des tangentes issues du point Q aux courbes du premier réseau, et le point Q est par rapport à elle le pôle de la droite AB (25).

Si les points A et B sont les points circulaires de l'infini, le premier réseau est l'ensemble des cercles qui coupent orthogonalement un même cercle, lequel forme alors avec la droite de l'infini la Hessienne, car il est le lieu des couples de points conjugués relatifs aux droites issues du centre radical commun. Ce cercle est aussi le cercle ayant pour diamètre le segment formé par l'un quelconque des couples de points conjugués, donc le cercle orthoptique d'une quelconque des courbes du second réseau coïncide avec lui, et ce réseau est l'ensemble des courbes par rapport auxquelles on connait les puissances de seconde espèce de trois points, ce qui détermine le cercle orthoptique (85). Réciproquement, nous savons qu'en effet lorsque ce cercle est déterminé, tous les cercles qui le coupent orthogonalement sont harmoniquement circonscrits à la conique.

Corrélativement, si les courbes du second réseau ont deux tangentes communes, la Hessienne se compose de ces deux tangentes et d'une troisième droite D (57). D'ailleurs le point d'intersection des deux tangentes et un point quel-

conque situé sur la droite D forment une conique du réseau : c'est donc un couple de points conjugués aux coniques du premier, ce qui ne saurait avoir lieu, quel que soit le point pris sur la droite D, à moins que cette droite ne soit par rapport à elles la polaire du point d'intersection des deux tangentes communes. Le premier réseau est donc l'ensemble des courbes par rapport auxquelles on connaît la polaire d'un point et un couple de points conjugués. La Cayleyenne se compose alors du point d'intersection des deux tangentes et d'une conique, enveloppe des couples de droites conjuguées relatifs aux points de la droite D. Cette conique est aussi l'enveloppe des tangentes aux courbes du second réseau en leurs points d'intersection avec la droite D (57) et le point d'intersection des deux tangentes communes est par rapport à elles le pôle de la droite D.

Si les deux tangentes communes sont les droites qui joignent un point F aux points circulaires de l'infini, le second réseau est l'ensemble des coniques ayant pour foyer le point F et conjuguées à un couple de droites. La droite D subsiste toujours, et par corrélation, la conique Σ, qui avec le point F forme la Cayleyenne, a également ce point pour foyer, et de plus la droite D pour directrice correspondante. En outre, le cercle C ayant son grand axe pour diamètre coupe orthogonalement les cercles analogues de toutes les coniques du réseau (58). Les tangentes issues à la conique Σ d'un point quelconque de la droite D sont une conique du premier réseau réduite à deux droites, et c'est ce qui distingue ce cas du précédent (109), où la Cayleyenne se réduisait aussi à une conique et à un point, car alors sur deux droites formant conique du premier réseau, une passait par le point fixe et l'autre était tangente à la conique. Si l'on mène encore des tangentes à la conique Σ d'un second point de la droite D, on obtiendra une seconde conique du premier réseau réduite à deux droites, laquelle,

par son intersection avec la première, donnera quatre points A, B, C, D, extrémités des cordes communes à un faisceau de coniques du premier réseau; or il résulte des propriétés focales que ces cordes sont vues du point F sous un angle droit; le cercle C est donc le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées du point F sur les cordes des courbes du premier réseau, cordes vues du point F sous un angle droit. Ce réseau est donc alors l'ensemble des courbes par rapport auxquelles on connaît le cercle analogue correspondant au point F, ce qui revient à donner la polaire d'un point et sa puissance de première espèce (**76**).

111. La droite de l'infini n'est généralement pas tangente à la Cayleyenne. Si cela arrive, les courbes du réseau ponctuel sont respectivement homothétiques aux courbes d'un faisceau ponctuel, et alors les milieux des trois segments formés par les trois couples de points conjugués sont en ligne droite (**21**); la conjuguée de la droite de l'infini, qui forme avec elle conique du réseau ponctuel, sera précisément celle qui joint les milieux des segments. Cette conique est aussi le cercle du réseau, car la droite qui joint les milieux des segments coupe à angle droit les cercles ayant ces segments pour diamètres. Comme elle doit aussi couper à angle droit les cercles orthoptiques de toutes les coniques du second réseau, il en résulte qu'alors ces cercles et par suite les coniques correspondantes ont leurs centres sur une même droite : ce qu'on pouvait énoncer immédiatement en remarquant que cette droite, formant avec la droite de l'infini conique du premier réseau, forme avec elle un couple de droites conjuguées aux coniques du second; donc celle de ces droites qui reste à distance finie passe par le centre de l'une quelconque de ces courbes. Des parallèles aux asymptotes de toutes les courbes du premier réseau formeront un faisceau en involution linéaire, dont les rayons doubles indiqueront la direction

des points conjugués communs situés à l'infini. Ces deux directions et la droite, lieu des centres, seront conséquemment les directions asymptotiques de la Hessienne (98). La Cayleyenne aura une branche parabolique dans la direction conjuguée harmonique de la troisième par rapport aux deux premières. Les hyperboles équilatères du premier réseau auront deux de leurs points communs à l'infini dans les directions des deux rayons conjugués rectangulaires du faisceau en involution linéaire formé par les asymptotes des courbes de ce réseau. Il y aura donc deux des cercles du second tout entiers à l'infini puisqu'ils n'ont pas leurs centres sur la droite des centres, et les deux autres points communs aux hyperboles équilatères du premier réseau, qui sont les centres des deux autres cercles du second, seront sur la droite des centres.

112. Si les deux points conjugués communs aux courbes du premier réseau, situés à l'infini, sont les points circulaires de l'infini, toutes ces courbes sont des hyperboles équilatères. Quant au second, il peut être regardé comme défini par les points circulaires de l'infini, qui sont une conique du réseau réduite à deux points, et par deux coniques quelconques. Un couple quelconque de droites formant conique du premier est rectangulaire, et comme il est conjugué aux deux dernières coniques qui déterminent le second réseau, il faut nécessairement que son sommet soit foyer d'une conique du faisceau tangentiel défini par ces deux courbes, car les couples de tangentes issues de ce point aux courbes de ce faisceau, étant conjugués par rapport aux deux droites rectangulaires, il y a un de ces couples formé par les droites qui joignent ce point aux points circulaires de l'infini. La Hessienne, lieu des sommets de ces couples, ne diffère donc pas dans ce cas du lieu des foyers des courbes du faisceau tangentiel défini par les deux dernières coniques qui déterminent le second réseau. On retombe ainsi par ce qui pré-

cède sur toutes les propriétés connues de la courbe, lieu des foyers des coniques tangentes à quatre droites (*Pl. IV*). D'abord elle passe par les points circulaires de l'infini, qui sont deux points conjugués, ainsi que par les six sommets du quadrilatère des quatre tangentes, puisque deux sommets opposés sont deux points conjugués ; elle passe aussi par les pieds des hauteurs du triangle des diagonales, puisqu'une diagonale et la hauteur correspondante forment deux droites conjuguées ([1]). L'asymptote réelle est parallèle à la droite des centres ([2]) (**111**), et, si l'on se sert pour la déterminer du procédé général qui donne la tangente à la Hessienne (**99**), on voit aisément qu'elle passe par le point symétrique par rapport à la droite des centres du foyer φ de la parabole tangente aux quatre droites ([3]). Car si l'on considère le point situé à l'infini, sur la droite des centres, ce point est sur la Hessienne, et les deux droites conjuguées issues de ce point sont la droite de l'infini sur laquelle les deux points conjugués sont les points circulaires de l'infini et la droite des centres (**111**). D'ailleurs la droite qui joint ce point à son conjugué est la parallèle à la droite des centres menée par le foyer de la parabole inscrite, car nous allons voir que deux points conjugués sont les deux foyers d'une même courbe tangente aux quatre droites, et la droite considérée joint le foyer de la parabole situé à l'infini au foyer φ situé à distance finie. L'asymptote sera donc (**99**) la conjuguée harmonique de la dernière droite par rapport aux deux premières, c'est-à-dire la symétrique de la dernière par rapport à la droite des centres. De plus, il est évident que de chaque point de la courbe on voit les diagonales du quadrilatère des tangentes

---

([1]) Faure.
([2]) Cremona.
([3]) P. Serret, *Géométrie de direction*, p. 198.

sous des angles ayant les mêmes bissectrices ([1]), puisque les droites issues d'un point de la Hessienne à deux points conjugués sont conjuguées harmoniques par rapport aux deux droites conjuguées issues de ce point (51). Ici ces dernières seront donc leurs bissectrices, puisqu'elles sont rectangulaires. On peut généraliser ce résultat, et dire :

THÉORÈME. — *De chaque point de la courbe lieu des foyers des coniques tangentes à quatre droites, on voit les deux foyers d'une de ces courbes, sous un angle variable, mais dont les bissectrices restent les mêmes.*

Il résulte en effet de ce qui précède que les droites qui joignent un point M de la Hessienne à deux points conjugués ont pour bissectrices fixes les droites conjuguées issues de ce point : il ne reste plus qu'à démontrer que les deux foyers d'une même courbe sont deux points conjugués; soient en effet F et F′ ces deux points, l'angle des droites MF et MF′ admet les mêmes bissectrices que l'angle des tangentes issues du point M à la courbe dont ils sont les foyers ([2]); or, la courbe considérée étant tangente aux quatre droites, ces deux tangentes sont conjuguées harmoniques par rapport aux droites conjuguées issues du point M, c'est-à-dire que ces dernières sont leurs bissectrices; donc, pour conclure le point F du point F′, on joindra MF, on mènera la symétrique de cette droite par rapport aux droites conjuguées issues du point M; un autre point M′ donnera de même une autre droite lieu du point F′, lequel sera ainsi déterminé par la construction identique à celle qui donne le conjugué du point F (51). Nous avons exécuté l'épure (*Pl. IV*) et nous avons également représenté la Cayleyenne qui est l'enveloppe des bissectrices fixes.

([1]) SERRET, *Géométrie de direction*, p. 198.
([2]) CHASLES, *Sections coniques*, p. 192.

On pourra ainsi énoncer sur la courbe lieu des foyers des coniques tangentes à quatre droites toutes les propriétés relatives aux deux courbes qui nous occupent en remplaçant la Cayleyenne par l'enveloppe des bissectrices fixes, deux points conjugués par deux foyers d'une même conique, et deux droites conjuguées par deux bissectrices correspondantes.

Si le quadrilatère des quatre tangentes est circonscriptible à un même cercle, il y aura une des courbes du second faisceau dont les foyers seront confondus, ou deux points conjugués confondus. On tombe donc dans un cas particulier de celui où toutes les courbes du premier réseau ont un point commun (109), celui où elles sont en outre des hyperboles équilatères : le point commun résultant des deux points conjugués confondus sera le centre du cercle inscrit. On peut donc dire que :

THÉORÈME. — *Lorsqu'un quadrilatère est circonscriptible à un cercle, la courbe du troisième degré, lieu des foyers des coniques inscrites dans le quadrilatère a un point double au centre du cercle. Les tangentes en ce point sont rectangulaires et sont les bissectrices fixes correspondant à ce point.*

Car ce sont deux droites conjuguées (24). La Cayleyenne se réduit à ce point par où passe une bissectrice de chaque couple et à une conique définie (24) enveloppe de l'autre bissectrice.

Si le quadrilatère est formé des quatre tangentes communes à deux cercles, les extrémités de chaque diagonale formant couple de points conjugués, on voit facilement en joignant un de ces six points à deux points conjugués que les bissectrices fixes ont deux points communs qui sont les points où la droite des centres coupe le cercle C qui passe par les extrémités des deux diagonales perpendiculaires à cette droite. Les hyperboles équilatères qui constituent le

premier faisceau ont donc deux points communs, qui doivent être les centres des cercles du second (94); et en effet les centres de ces deux cercles sont les points où le cercle C coupe la droite des centres. Le lieu des sommets des couples est évidemment le cercle C, puisque ces couples sont rectangulaires et la droite des centres complète la Hessienne, lieu des foyers. Quant à la Cayleyenne, elle se réduit aux deux points communs aux courbes du premier réseau, et au point situé à l'infini dans une direction perpendiculaire à la droite qui les joint (25).

113. Enfin si les deux points conjugués situés à l'infini sont dans deux directions rectangulaires, tous les cercles ayant même axe radical, qui admettent deux des trois couples qui déterminent le premier réseau, admettant aussi ce couple situé à l'infini, font partie de ce réseau, et comme ils doivent couper orthogonalement tous les cercles ayant pour diamètres les segments formés par les couples de points conjugués, il en résulte que ce fait se présentera lorsque les cercles ayant pour diamètres les trois segments auront, non-seulement leurs centres en ligne droite comme précédemment, mais encore même axe radical. Les cercles orthoptiques du réseau tangentiel auront donc même axe radical, et l'on peut dire qu'à un réseau ponctuel dans lequel il y a deux cercles correspond un réseau tangentiel, dans lequel deux conditions déterminantes sont les puissances de deux points, ce qui n'a pas lieu généralement, puisqu'un seul point a même puissance par rapport aux courbes du réseau (88). En général, on connait dans le second réseau les puissances d'autant de points qu'il y a de cercles distincts dans le premier (110).

114. Corrélativement, si, parmi les points de la Hessienne, il y en a un tel que les deux droites conjuguées issues de ce point aillent aux points circulaires de l'infini, toutes les courbes du second réseau seront vues de ce point

sous un angle droit. Et en effet, ces deux droites, qui forment conique du premier réseau, constituent un cercle de rayon nul : les cercles orthoptiques du second, qui le coupent orthogonalement, auront donc un point commun. Ce cas se présentera donc lorsqu'un des quatre cercles du premier réseau aura son rayon nul.

Il y a sur la Hessienne trois points pour lesquels les droites conjuguées sont rectangulaires, puisqu'il y a trois couples rectangulaires formant hyperbole équilatère du premier réseau; il y aura dans le second réseau une infinité de coniques ayant pour foyer l'un de ces points, ce qui n'a pas lieu pour tout autre point du plan (59). Ces coniques auront deux tangentes communes et formeront faisceau du réseau tangentiel, ce qui tient à ce que les trois cercles déduits de ce point et des trois couples de droites conjuguées qui déterminent le réseau, comme nous l'avons vu plus haut (59), ont même axe radical.

115. Le dernier cas qu'il reste à examiner est celui où les courbes du premier réseau ont trois points communs. Il est évident qu'alors toutes les coniques conjuguées au triangle des trois points appartiennent au second réseau, car les premières leur sont harmoniquement circonscrites, et comme c'est une condition triple, il n'y en a pas d'autre.

Corrélativement, si les courbes du second ont trois tangentes communes, toutes les courbes du premier sont conjuguées au triangle de ces trois droites. L'ensemble des coniques conjuguées à un triangle peut donc être considéré soit comme un réseau ponctuel, soit comme un réseau tangentiel; il est facile de voir qu'en effet l'on peut choisir soit trois couples de points, soit trois couples de droites tels que toutes les coniques qui leur sont conjuguées soient conjuguées à un triangle donné.

116. Nous résumerons cette discussion par le tableau suivant :

Conditions déterminant le réseau ponctuel.	*Conditions déterminant le réseau tangentiel.*
Cas général. — Trois couples quelconques de points conjugués, ou les puissances de n points ($n \leqq 3$) et $3 - n$ couples, ou trois coniques dont une peut être un cercle et deux des hyperboles équilatères.	*Cas général.* — Trois couples quelconques de droites conjuguées, ou la puissance d'un point et deux couples, ou trois coniques dont deux peuvent être des paraboles.
Cas particuliers. — Un point et deux couples.	Une des trois coniques est un cercle de rayon nul.
Une des trois coniques est réduite à une droite.	Une tangente et deux couples.
Cette droite est à l'infini.	Les trois coniques sont des paraboles.
Deux points et un couple.	Le pôle d'une droite et un couple.
La polaire d'un point et un couple.	Deux tangentes et un couple.
Un couple est à l'infini.	Les trois coniques ont leurs centres en ligne droite.
Les trois coniques sont des hyperboles équilatères.	Les trois couples sont rectangulaires.
Deux des coniques sont des cercles.	Les puissances de deux points et un couple.
Les trois coniques sont des cercles.	Les puissances de trois points.
La puissance et la polaire d'un point.	Les trois coniques ont un foyer commun.
Trois points.	Un triangle conjugué.
Un triangle conjugué.	Trois tangentes.

Quatrième cas. — *Un système ponctuel du troisième ordre et un faisceau tangentiel contravariants.*

117. Les courbes du faisceau tangentiel ont alors quatre tangentes communes, et les trois couples de points formant coniques de ce faisceau sont précisément les trois couples de points conjugués aux courbes du premier (27).

Si c'est le faisceau tangentiel qui est donné, on en conclura le système ponctuel en construisant quatre coniques quelconques harmoniquement circonscrites à deux coniques du faisceau ; si c'est le système ponctuel, le faisceau sera déterminé par deux coniques quelconques harmoniquement inscrites à quatre coniques du système ponctuel ;

nous donnerons ultérieurement la solution de ces problèmes.

D'un point quelconque on peut mener aux courbes du faisceau tangentiel des tangentes formant un faisceau en involution linéaire, ce qui prouve que par un point quelconque passent deux droites réelles ou imaginaires formant conique du système ponctuel. Si le point est sur l'une des tangentes communes aux courbes du faisceau, les deux droites conjuguées communes à ces courbes passant par ce point se confondent; il y a donc quatre droites, réelles ou imaginaires, qui forment individuellement conique du système ponctuel : ce sont les côtés du quadrilatère résultant des trois couples de points conjugués (27).

Tous les cercles du système ponctuel satisfont à quatre conditions ponctuelles et ont même axe radical : d'ailleurs ils doivent passer par les centres des deux hyperboles équilatères du faisceau (94, 2°); ils forment donc la série orthogonale aux cercles orthoptiques du faisceau (87).

La conique du faisceau qui est vue d'un point donné sous un angle droit est l'enveloppe des polaires du point par rapport aux courbes du système ponctuel qui ont ce point pour foyer (94, 3°).

118. S'il y a un cercle dans le faisceau, une des conditions déterminantes du système ponctuel est la puissance d'un point. Toutes les hyperboles équilatères de ce système, qui forment réseau ponctuel, ont alors un point commun qui est le centre de ce cercle (94, 2°). S'il y en a deux, c'est-à-dire si les quatre tangentes communes aux courbes du faisceau sont les tangentes communes à deux cercles, les deux conditions déterminantes du système ponctuel sont les puissances de deux points et toutes les hyperboles équilatères de ce système forment un réseau ponctuel à deux points communs (25) et dans lequel conséquemment le point Q est à l'infini dans la direction perpendiculaire à la droite des centres des deux cercles.

On ne peut pas supposer que les hyperboles équilatères du système tangentiel aient trois points communs, car elles en auraient un quatrième et formeraient faisceau ; or elles forment réseau. Mais il peut arriver que toutes les courbes du système soient des hyperboles équilatères ; alors deux couples de points conjugués communs de ce système ou, ce qui revient au même, deux sommets opposés du quadrilatère des tangentes communes aux courbes du faisceau sont les points circulaires de l'infini ; c'est-à-dire que ces dernières sont homofocales, et les foyers communs sont les deux autres points réels, conjugués communs aux courbes du système ponctuel.

Il n'y a généralement dans le premier système qu'un faisceau de cercles, lesquels déterminent les puissances de deux points par rapport aux courbes du second dont les cercles orthoptiques ont, en effet, même axe radical ; s'il y en a trois et le réseau résultant, le cercle orthoptique d'une courbe quelconque du second système est déterminé, et l'on connait de plus un couple de droites conjuguées. Nous avons appris (105) à déterminer les quatre tangentes résultantes ; elles forment un quadrilatère rectangle, et réciproquement toutes les coniques inscrites dans un rectangle sont harmoniquement inscrites à trois cercles distincts. S'il y a quatre cercles dans le premier système, il y a tous les cercles du plan, lesquels satisfont en effet à deux conditions ; le second se compose alors de tous les couples de points situés à l'infini dans des directions rectangulaires.

Si dans un des couples de points formant coniques du faisceau tangentiel, les deux points coïncident, ce dernier se compose de toutes les coniques tangentes à deux droites données en des points donnés. C'est ce qui arrive lorsque les courbes du premier système ont un point commun, car il forme un couple de points conjugués confondus. Si cela a lieu également pour un autre couple de points, les courbes du premier système sont toutes celles qui passent par deux

points donnés, et celles du second sont tous les couples de points conjugués de l'involution linéaire dont ces deux points sont les points doubles.

Si un même point fait partie de deux des couples de points conjugués aux courbes du système ponctuel, ce système se compose des courbes par rapport auxquelles ce point a pour polaire la droite qui joint ses conjugués dans les deux couples et le faisceau tangentiel de tous les couples de points formés par celui-là et un point quelconque de la droite précédente.

Enfin, si toutes les courbes du faisceau tangentiel sont les paraboles inscrites dans un triangle, celles du premier sont toutes celles sur lesquelles deux droites données interceptent respectivement des cordes ayant mêmes points milieux. Tous les cercles de ce dernier sont alors les cercles concentriques ayant pour centre commun le point de rencontre des hauteurs du triangle circonscrit aux paraboles.

CINQUIÈME CAS. — *Un système ponctuel du quatrième ordre dont toutes les courbes sont harmoniquement circonscrites à une même conique formant système tangentiel d'ordre zéro.*

119. Si c'est le premier système qui est donné, la conique harmoniquement inscrite en résultera ainsi que nous le verrons plus loin (**125**); si c'est cette dernière, on construira facilement cinq coniques quelconques qui lui soient harmoniquement circonscrites et déterminent le premier système (**34**).

Ce système renferme une infinité de couples de droites qui sont tous les couples de droites conjuguées à la conique triple, quatre hyperboles équilatères distinctes et le système ponctuel du troisième ordre résultant, et trois cercles distincts ainsi que le réseau ponctuel résultant.

Par suite, ces hyperboles ne peuvent avoir qu'un point commun, c'est ce qui arrive lorsque la conique triple est un cercle; elles passent toutes par le centre (94, 2°). Si elles en avaient deux, elles formeraient réseau, ce qui est impossible. Dans le cas où la conique triple est un cercle, la condition déterminante du premier système est la puissance d'un point. S'il y a cinq hyperboles équilatères, il en est de même de toutes les autres courbes du système, et la conique triple est formée par les deux points circulaires de l'infini.

S'il y a quatre cercles, il y a tous les cercles du plan et une cinquième conique quelconque, et la conique triple est encore un couple de points qui sont les points doubles de l'involution linéaire déterminée sur la droite de l'infini par tous les cercles du plan et la cinquième conique. D'ailleurs il ne peut pas y avoir plus de quatre cercles distincts, puisque tous les cercles du plan ont deux points communs.

Si la conique triple est une hyperbole équilatère, tous les cercles du système qui ont en général même centre radical ont un point commun, centre de l'hyperbole (94, 2°), ce qui en est un cas particulier.

Nous avons vu (36) que l'on peut construire deux droites formant conique du système sans la notion de la conique triple en s'en donnant trois points A, B, C, d'où il résulte un quatrième point Q, et dans cette construction le point Q est le même quels que soient A et B sur la droite AB, parce qu'il est le pôle de cette droite par rapport à la conique triple.

La condition à laquelle satisfont toutes les courbes du faisceau est donc d'être harmoniquement circonscrites à une conique fixe (36).

120. Nous croyons maintenant qu'il sera toujours possible, au moyen des détails qui précèdent, de déterminer le système contravariant d'un système donné; il ne nous reste

plus qu'à donner les solutions de quelques problèmes, qui compléteront la théorie des coniques en involution.

Remarquons d'abord que toutes les coniques qui passent par trois points et qui sont harmoniquement circonscrites à une conique donnée, satisfaisant à quatre conditions ponctuelles, passent par un quatrième point qu'il est facile de déterminer, car un des trois systèmes de deux droites formant conique du faisceau ponctuel cherché se compose de la droite qui joint deux des points donnés et de celle qui joint le troisième point au pôle par rapport à la conique donnée de la droite précédente. Les trois systèmes de deux droites ainsi obtenus passent par le point cherché, et l'on retombe en même temps sur ce théorème connu :

Lorsque deux triangles sont réciproquement conjugués par rapport à une conique, ils sont homologiques.

121. Problèmes. — *Construire la conique passant par quatre points et harmoniquement circonscrite à une conique donnée* C.

1° Si les quatre points sont donnés directement, la polaire de l'un d'eux par rapport à la conique donnée coupera la conique cherchée suivant les points conjugués communs à deux involutions linéaires, dont l'une a pour points doubles les points d'intersection de cette droite et de la conique donnée (66) et l'autre est déterminée par deux quelconques des courbes qui passent par les quatre points donnés.

2° Si les quatre points sont communs à deux coniques déterminées, on coupera ces deux courbes par une droite quelconque sur laquelle elles donneront un couple de points conjugués à la conique cherchée. Ces deux points forment une conique harmoniquement inscrite à la conique cherchée (93); il en est de même de la conique C (66); donc il en sera de même de toutes les coniques du faisceau tangentiel qu'elles déterminent (68) et en particulier des

couples de sommets opposés du quadrilatère obtenu en menant des deux points des tangentes à la conique C. La droite qui contient l'un de ces couples coupera conséquemment la conique cherchée en deux points connus, puisque ce sont les points conjugués communs à deux involutions linéaires dont l'une a pour points doubles ces deux sommets opposés et l'autre s'obtient au moyen des deux coniques déterminant les quatre points.

122. *Construire la conique passant par trois points et harmoniquement circonscrite à deux coniques données.*

Au moyen des trois points donnés et de chacune des coniques, on déterminera successivement un quatrième, puis un cinquième point de la conique cherchée (**120**) [1].

123. *Construire la conique passant par deux points et harmoniquement circonscrite à trois coniques données.*

On cherchera les polaires de l'un des points par rapport à chacune des trois coniques; l'une de ces droites coupera la conique cherchée et la conique correspondante suivant quatre points en proportion harmonique (**66**); on aura donc ainsi trois couples de points conjugués et l'on retombera sur un problème précédent (**14**).

124. *Construire la conique passant par un point et harmoniquement circonscrite à quatre coniques données.*

On cherchera les polaires du point par rapport aux quatre coniques, ce qui ramènera le problème à un problème précédent (**16**).

125. *Construire la conique harmoniquement circonscrite à cinq coniques données.*

On construira deux coniques harmoniquement circonscrites à quatre des coniques données en s'en donnant

---

[1] M. Smith a résolu ce problème de la même façon et a donné pour les trois suivants des solutions différentes (*Proceedings*, p. 87).

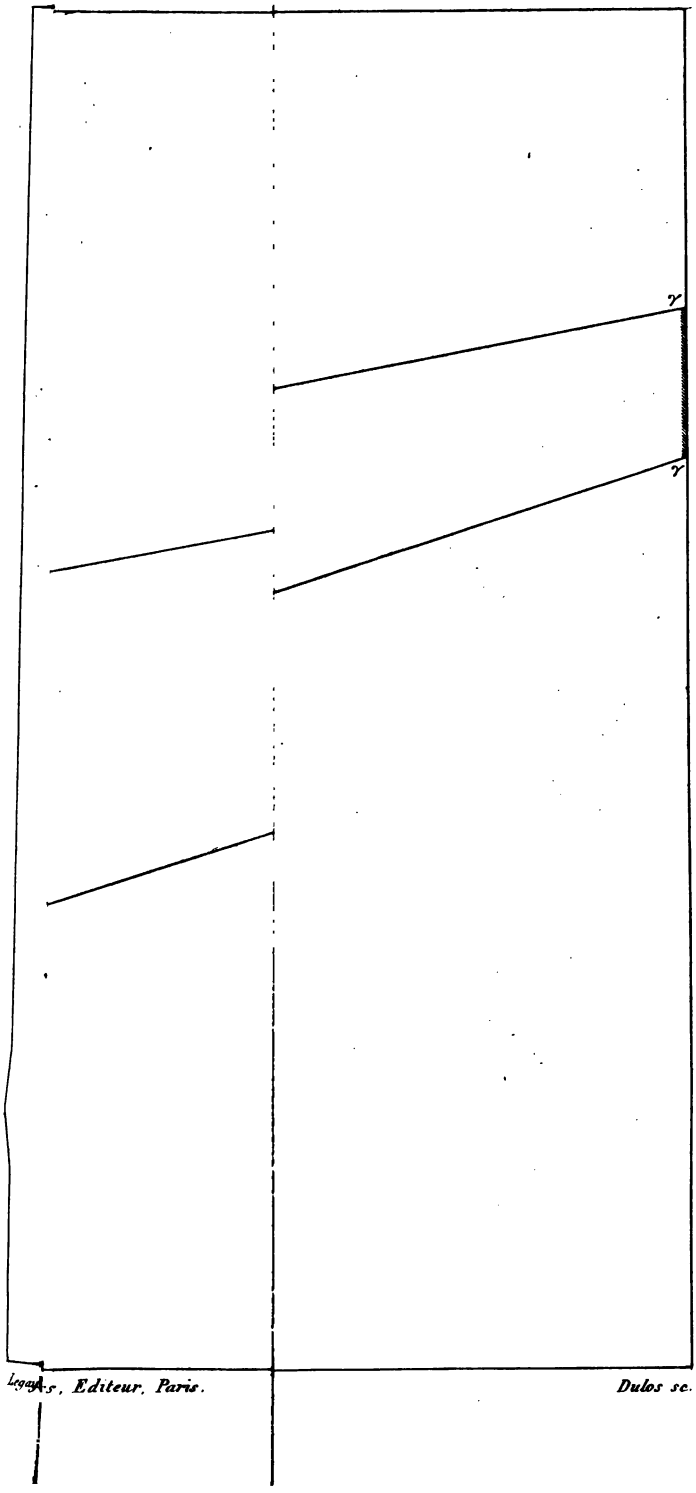
arbitrairement un point (124); elles détermineront un faisceau ponctuel dans lequel on construira la conique harmoniquement circonscrite à la cinquième (121).

Une autre solution consistera à chercher cinq couples de points formant conique du système tangentiel défini par les cinq coniques données (64); ils seront conjugués à la conique cherchée et l'on sera ramené à un problème précédent (16) (105).

Nous n'insisterons pas sur les problèmes corrélatifs dont les solutions seraient entièrement analogues.

FIN.

Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.



Legrand, Editeur, Paris. Dulos se.

SUR LES DIVERSES MANIÈRES

DE PRÉSENTER LA THÉORIE

DES ONDES LUMINEUSES,

PAR

M. DE SAINT-VENANT,

MEMBRE DE L'INSTITUT.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

1872

SUR LES DIVERSES MANIÈRES DE PRÉSENTER LA THÉORIE DES ONDES LUMINEUSES;

PAR M. DE SAINT-VENANT.

1. On sait, surtout depuis la publication des travaux inédits de Fresnel, que la belle découverte des lois des cristaux à deux axes a été révélée à son génie, plus profondément philosophique que mathématique [1], par une généralisation intuitive de la loi d'Huygens, préalablement transformée par lui au moyen de la considération de ces ondes « à centre de courbure infiniment éloigné », c'est-à-dire planes, qui donnent [2] « plus de simplicité » aux recherches. Dès la publication de son immortel Mémoire sur la double réfraction [3], où il semble déduire, d'un calcul de vibrations produites par des forces élastiques, des résultats qu'il avait trouvés tout autrement, presque tout le monde aperçut que la « théorie mécanique » dont il voulait les appuyer était défectueuse; et l'on sentit le besoin d'une théorie réellement rationnelle de cet ordre important de phénomènes.

Mais la base de cette théorie meilleure n'existait pas encore : il fallait la créer.

Elle le fut, l'année même, dans un autre but, par deux hommes appartenant, comme Fresnel, au corps des Ponts et Chaussées. Navier, après avoir, en 1819, étudié d'une manière plus particulière qu'il n'avait fait depuis 1813 la flexion des tiges élastiques, afin de mieux évaluer la résis-

(1) *Voir* l'Introduction mise en tête de ses *Œuvres complètes* (1866), p. 28, 71, 74 et suivantes, par Émile Verdet, enlevé à la science au même âge que lui. *Voir* aussi une Note au bas de la page 811 du second volume.

(2) *Œuvres*, t. II; premier Mémoire sur la double réfraction (19 novembre 1821, p. 286).

(3) Présenté les 26 novembre 1821, 22 janvier et 22 avril 1822.

tance des pièces de charpente employées dans des situations variées ([1]), étendit, en 1820, ses recherches analytiques à des solides ayant deux de leurs dimensions beaucoup plus grandes que la troisième, c'est-à-dire aux plaques élastiques ([2]); puis, après avoir présenté (18 mars 1821) une première partie de ses recherches sur le mouvement des fluides en ayant égard à leurs frottements intérieurs ([3]), il revint aux corps solides, et, dans un Mémoire du 14 mai 1821 ([4]), qui fait époque, il fonda, en embrassant les trois dimensions supposées du même ordre de grandeur, la branche nouvelle de mécanique que Lamé a nommée la *Théorie de l'Elasticité*.

2. Cauchy, de son côté, sans attendre la publication, même partielle, de ce Mémoire justement célèbre de Navier, et en examinant seulement celui de 1820 sur les plaques, où il crut voir que l'auteur faisait entrer dans ses calculs deux sortes de résistances, l'une à l'extension, l'autre à la flexion ([5]), concevait l'idée de les réduire à une seule force, analogue à la pression dans les fluides, mais de

---

([1]) La partie du Mémoire de Navier du 23 novembre 1819 (dont l'impression aux *Savants étrangers* n'a pas reçu d'exécution), relative aux pièces courbes ou préalablement courbées, a été insérée par extrait au *Bulletin de la Société Philomathique*, 1823, p. 98 et 114.

([2]) Ce beau Mémoire, du 14 août 1820, sur les *plans élastiques*, ne fut connu que par des copies lithographiées, comme on voit au *Bulletin de la Société Philomathique* de février 1823, p. 36. Un extrait considérable en fut inséré au même *Bulletin*, juin 1823, p. 92.

([3]) Cette première Communication, du 14 mai 1821, sur les fluides, a été insérée par extrait au t. XIX des *Annales de Chimie et de Physique*, p. 244, ainsi qu'au *Bulletin de la Société Philomathique* de mai 1822, p. 75. Le Mémoire plus complet a été lu le 15 décembre 1822, inséré par extrait au même *Bulletin*, 1825, p. 40, et imprimé ensuite au t. VI des *Mémoires de l'Académie*.

([4]) Ce Mémoire sur les Solides élastiques, inséré par extrait à la page 177 du *Bulletin*, décembre 1824, a paru au t. VII des *Mémoires de l'Institut*.

([5]) Navier s'est défendu, dans une Note au *Bulletin de la Société Philomathique* de février 1823, p. 36, d'avoir fait cette distinction comme de forces d'espèce différente.

direction généralement oblique aux faces où elle s'exerce. Il établissait ainsi, dans un Mémoire du 30 septembre 1822 (1), d'abord une théorie purement cinématique des dilatations et condensations d'un corps quelconque en divers sens autour de chaque point, puis ses beaux et féconds théorèmes relatifs aux pressions ou tensions (2) sur diverses faces, en déterminant leurs relations tant entre elles qu'avec les forces accélératrices ou les inerties, au moyen de la considération si simple de l'équilibre obligé d'un élément tétraèdre et d'un élément parallélépipède; théories qui conviennent à l'intérieur de toutes les masses solides ou fluides, en repos ou en mouvement.

3. Après avoir développé, de 1827 à 1829, les considérations très-générales qui se trouvaient ainsi en germe dans son Mémoire de 1822 (3), Cauchy, dont les équations

---

(1) *Recherches sur l'équilibre et le mouvement intérieur des corps solides ou fluides élastiques ou non élastiques.* On ne connaît ce Mémoire (paraphé à l'Académie le jour de sa présentation) que par l'extrait de moins de quatre pages qui en a été imprimé au *Bulletin de la Société Philomathique* de janvier 1823, p. 9, et par les citations que Cauchy en fait à la page 177 du volume de 1828 des *Exercices de Mathématiques,* où, après en avoir reproduit les formules, il les complète ou plutôt les rectifie aussitôt par l'addition, à celles des composantes normales de pression, d'un terme essentiel, moyennant lequel les formules, particularisées, se trouvent être d'accord avec les équations tant *indéfinies* que *définies* de Navier.

(2) Dans toutes les formules données par lui et depuis lui, ces résultantes d'actions entre particules à travers diverses faces, qui ont été appelées par Lamé *forces élastiques*, sont réellement des *tensions* ou *tractions*, et non des pressions proprement dites, lorsque leur valeur est positive. Aussi M. Clebsch les désigne par la lettre t suivie d'indices (*Theorie der Elasticität fester Körper;* Giessen, 1863).

(3) Verdet, à la p. 79 de son *Introduction*, ne cite que Cauchy, Green, Poisson, Lamé, comme continuateurs de la théorie de l'Élasticité, qu'il attribue à Fresnel. Il n'a pas connu apparemment le Mémoire du 14 mai 1821, de Navier, incontestablement inventeur de cette théorie, et, en ne parlant que des volumes des *Exercices* de Cauchy de 1827 et 1828, il n'a pas remarqué les renvois du volume de 1828 au Mémoire de 1822, où toutes les bases étaient posées (voir l'*Historique* mise en tête de l'édition, 1864, des *Leçons*, à l'École des ponts et chaussées, de Navier, nos xxiij et xxiv).

s'appliquaient au mouvement intérieur de corps élastiques d'une contexture différente dans les divers sens, fut engagé, dit-il [1], par quelques personnes, à en faire une application à la théorie de la lumière.

Dans une première Communication à l'Académie, le 12 janvier 1829 [2], il arriva aux lois principales des vibrations lumineuses dans les systèmes *isotropes* ou d'égale élasticité en tous sens [3], et dans ceux où tout est symétrique autour d'un axe. Mais son premier mémoire généralement connu a été lu à l'Académie les 1er et 31 mai, 7 et 14 juin 1830 [4]. Comme Fresnel, il supposa que le fluide éthéré, vu l'extrême petitesse de ses oscillations, vibrait à la manière d'un solide, c'est-à-dire d'un système de molécules conservant leurs premiers arrangements entre elles, et, aussi, que celui qui remplit les intervalles des molécules des cristaux a été amené, par leur action, à un nouvel état stable dans lequel il possède, en divers sens, des résistances élastiques d'intensités différentes, comme s'il était cristallisé lui-même.

Adoptant encore l'idée ingénieusement simplificatrice du grand physicien, il introduisit analytiquement, dans ses équations différentielles, la condition de mouvements se propageant par ondes planes, ou « restant les mêmes » pour toutes les molécules situées dans chaque plan » parallèle à un *plan invariable* donné », ces mouvements vibratoires étant, d'abord, supposés rectilignes, ou tels que les déplacements des points, projetés suivant trois direc-

---

(1) *Bulletin des Sciences* (du baron de Férussac), 1830, t. XIII, p. 415.

(2) On peut voir une récapitulation de ses travaux au *Compte rendu des séances de l'Académie des Sciences* du 15 janvier 1839, t. XXVIII, p. 58.

(3) Le mot *isotrope* a été employé pour la première fois par Cauchy en 1842, séance de l'Académie du 12 septembre.

(4) Il occupe les pages 19 à 72 du cinquième volume, inachevé, des *Exercices de Mathématiques*. Il a besoin d'être complété, quant aux conclusions surtout, par l'extrait cité du *Bulletin Férussac*.

tions rectangulaires, aient pour grandeurs trois constantes multipliées par une même fonction périodique, réductible au cosinus d'une fonction linéaire des trois coordonnées et du temps. Cauchy tira de là presque immédiatement trois relations entre les trois angles, supposés donnés, qui déterminent la direction de la normale commune aux plans des ondes, la vitesse commune de leur propagation, et trois autres angles, aussi inconnus, devant déterminer la direction des petites vibrations rectilignes des molécules.

L'élimination de ces trois derniers angles fournit, pour déterminer le *carré* de la vitesse de propagation, une équation du troisième degré, indiquant que, d'après ces suppositions, une onde plane, provoquée quelque part, se divise généralement, en avant comme en arrière, en trois autres qui se propagent avec des vitesses différentes, et où les mouvements vibratoires affectent trois directions rectangulaires fixes, dépendant à la fois de la direction du plan de l'onde et de la contexture isotrope ou hétérotrope du milieu, c'est-à-dire de la grandeur relative des divers paramètres ou coefficients d'élasticité entrant dans les équations différentielles ainsi traitées.

4. L'équation du troisième degré aux carrés des vitesses de propagation, si on la divise par le cube de son inconnue, donne, en coordonnées polaires, une certaine surface dont les rayons vecteurs sont proportionnels aux inverses des vitesses de propagation des ondes planes qui leur sont perpendiculaires. C'est, comme il a été remarqué depuis, la polaire réciproque, par rapport à une sphère concentrique d'un rayon égal à l'unité, de la *surface des ondes lumineuses*, à trois nappes, surface qui a pour propriété caractéristique d'être tangente, à chaque instant, à toutes les ondes planes qui seraient parties du centre d'ébranlement, ou de l'origine, en même temps et dans tous les sens.

Pour que cette analyse donne la surface d'onde qui a été trouvée, par Fresnel, si bien et si indépendamment de la

partie aujourd'hui rejetée de sa théorie mathématique, il faut d'abord, si l'éther de l'intérieur des cristaux est réellement de contexture élastique différente en divers sens, qu'il offre trois plans rectangulaires de symétrie de contexture, ce que la théorie de Fresnel lui présentait à tort comme devant avoir lieu pour tout système élastique. Mais Cauchy démontre qu'il faut de plus pour cela, en prenant (afin de simplifier) pour axes coordonnés les trois intersections mutuelles de ces plans de symétrie, qu'il y ait entre les neuf paramètres ou coefficients d'élasticité restants, *quatre* certaines relations qu'il indique [1].

Moyennant, en effet, ces quatre conditions, et pourvu aussi que l'éther ne supporte pas préalablement (n° 14 ci-après) des pressions considérables inégales en divers sens, la polaire réciproque de l'onde, du sixième degré en coordonnées ordinaires, se décompose en un ellipsoïde et en une surface du quatrième degré; et l'onde elle-même se partage, 1° en un autre ellipsoïde, donnant des vibrations que l'on reconnaît être *à peu près* longitudinales ou *presque* perpendiculaires aux plans des ondes, et 2° une autre surface du quatrième degré, celle de Fresnel, donnant des vibrations qu'on trouve être *à peu près* transversales, c'est-à-dire s'écartant peu du plan des ondes planes ou tangentes à cette surface, dans les limites toujours étroites des degrés de biréfringence qu'offrent les cristaux connus.

5. Ces quatre conditions ou relations de Cauchy, en apparence compliquées et singulières, expriment néanmoins très-approximativement [2] ce qu'il y a de plus simple en

---

[1] Ce sont les relations (156), (160), (164) et (172), p. 64 à 67 du Mémoire cité de Cauchy, de 1830. Les trois premières portent le n° 6 à l'article du *Bulletin Férussac*.

[2] Mémoire sur la distribution des Élasticités autour de chaque point d'un solide ou d'un milieu de contexture quelconque, particulièrement lorsqu'il est amorphe sans être isotrope (*Journal de Mathématiques pures et appliquées* de M. Liouville, t. VIII, 2e série, août et septembre 1863. *Voir* au

fait de constitution élastique après l'isotropie, à savoir l'état ou la constitution d'un milieu dont l'isotropie primitive aurait été altérée par des compressions ou dilatations inégales, qui, comme on sait, peuvent se réduire à trois dans des directions rectangulaires. Comme l'onde de Fresnel détermine admirablement, quand on se tient à une première et déjà très-grande approximation, toutes les circonstances de la marche de deux des trois systèmes d'ondes planes, ou celles des deux rayons à vibrations quasi-transversales et éclairantes, il résulterait ainsi des premiers travaux de Cauchy que si l'éther de l'intérieur des cristaux *se trouve dans un état élastique hétérotrope,* comme il le supposait après Fresnel, ce doit être cet état simple d'*isotropie altérée* par des actions qui auraient cessé d'agir après avoir produit leur effet.

6. Cauchy aperçut bientôt que cette analyse de mai et de juin 1830 ne suffisait pas pour expliquer des phénomènes lumineux plus délicats, tels que la dispersion, la polarisation circulaire, etc. Aussi, dès le mois suivant, il insérait dans un recueil [1], à la suite d'une Note sur la réflexion et la réfraction, une page sur la dispersion, où il tenait compte, suivant un conseil qu'il dit lui avoir été donné par Coriolis,

---

n° 23, p. 406). On peut en donner une démonstration plus simple et plus générale que je n'ai fait alors.

J'ai dû, dans ce Mémoire de 1863, car cela était dans mon sujet, faire, des conditions présentées par Green pour que les vibrations soient exactement transversales dans les cristaux, une réfutation qui atteint également les conditions *de biréfringence* proposées par Lamé, et prouver que ces conditions n'expriment que l'isotropie, qui exclut la biréfringence. Aussi Lamé et Green ne sont pas compris dans l'analyse que je fais des recherches de divers auteurs sur la lumière. Il importe que des hommes de talent ne s'égarent plus, en pareille matière (*Journal des Mathématiques*, 1866, t. XI, p. 5), sur les errements des deux illustres auteurs de tant d'autres travaux plus dignes d'eux. Je ne crois pas utile, non plus, de mentionner quelques tentatives qui ont été faites par Poisson, en regardant l'éther comme tenant du solide et du fluide dans les vibrations qu'il exécute (T. XIII des *Mémoires de l'Académie des Sciences*, 1839).

[1] *Bulletin de M. de Férussac*, t. XV, p. 9.

de termes différentiels d'un ordre supérieur au second dans les séries de Taylor, exprimant les grandeurs relatives des déplacements de molécules très-voisines les unes des autres. Il y montrait qu'en ajoutant seulement à l'équation différentielle d'un de ces déplacements projetés un terme affecté de sa dérivée quatrième par rapport à une coordonnée transversale, comme il en résulte, dans l'expression de la vitesse de propagation, l'addition d'une partie inversement proportionnelle au carré de la longueur d'onde, la mise en compte d'un pareil terme suffisait pour donner la vitesse de propagation d'autant plus petite que cette longueur est plus grande, et par conséquent pour faire varier, en conformité avec l'expérience, la réfrangibilité avec la couleur du rayon. Cette idée fut développée dans un grand Mémoire *sur la dispersion de la lumière*, dont l'impression, commencée en France en 1830, fut complétée à Prague en 1835 et 1836 (1). Nous dirons plus loin les difficultés sérieuses qui s'opposent à ce que ce point de vue soit adopté (*Voir* n° 17).

7. L'examen que fit Cauchy, dans le même Mémoire de 1836, de ce qui doit se passer lors de la réfraction et de la réflexion de la lumière (2), le détermina bientôt à considérer un mouvement par ondes planes plus général que ne sont les mouvements vibratoires rectilignes et de même amplitude partout. Il reconnut d'abord, en novembre 1838 (3) que les trois équations différentielles des déplace-

(1) *Nouveaux Exercices de Mathématiques. Voir* aussi diverses lettres de Cauchy à Ampère aux *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences;* 1836, 22 février, p. 182; 29 février, p. 207; à Libri, 28 mars, p. 341; 11 avril, p. 364; 2 mai, p. 427; 9 mai, p. 455.

(2) *Nouveaux Exercices de Mathématiques*, p. 56 à 60 et 200 à 203, et Lettres insérées aux *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* de 1836, premier semestre, où un *Mémoire lithographié* la même année est souvent cité.

(3) 19 et 26 novembre, *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. VII, p. 867 et 907.

ments moléculaires pouvaient encore être satisfaites en ajoutant trois constantes, de grandeurs différentes, aux arcs des cosinus dont les trois projections de ces déplacements sont affectées comme on a dit (n° 3); ce qui suffit pour faire parcourir aux molécules, au lieu de lignes droites, de petites ellipses parallèles à un deuxième *plan invariable* (son premier *plan invariable* étant celui auquel les ondes sont parallèles). Puis, dans un second Mémoire, présenté le mois suivant [1], il montra que les mêmes équations pouvaient être satisfaites tout aussi bien si les trois multiplicateurs des cosinus étaient affectés d'exponentielles réelles, dont les exposants soient de même forme linéaire en x, y, z, t, que les trois arcs des cosinus, avec des coefficients négatifs qu'il a appelés d'extinction par le temps et d'extinction par l'espace; car il en résulte que les amplitudes des oscillations moléculaires décroissent en progression géométrique, à mesure qu'il y a accroissement arithmétique, ou du temps, ou de la distance des diverses molécules à un certain *troisième plan invariable*.

Les conditions, généralement au nombre de six, que doivent remplir les constantes entrant dans ces expressions nouvelles et plus générales des déplacements moléculaires par ondes planes, peuvent être établies en les substituant dans les trois équations différentielles à satisfaire, et en égalant séparément à zéro, après les développements, ce qui affecte le cosinus et ce qui affecte le sinus de la partie variable des arcs dans chaque équation.

Mais on obtient bien plus facilement ces six conditions si, avant la substitution, l'on remplace les trois cosinus par des exponentielles imaginaires dont ils sont les parties réelles, et si ensuite on dédouble en six, par la séparation

---

[1] 10 et 17 décembre, *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. II, p. 985 et 1044.

des parties imaginaires, les trois équations symboliques ainsi obtenues d'abord.

L'extinction par le temps, bien que possible analytiquement, est toujours abstraite dans les calculs, parce qu'elle ne répond à rien d'observable; en sorte qu'on n'y laisse subsister que des vibrations *persistantes*. Et, quant à l'extinction par l'espace, qui est une rapide diminution des amplitudes des vibrations à partir d'un certain plan et d'un des deux côtés de ce plan, comme elle serait accompagnée, du côté opposé, d'une rapide augmentation, inadmissible si le plan se trouve dans l'intérieur d'un milieu, Cauchy ne la suppose y exister qu'à partir d'une face séparant ce milieu d'un autre milieu d'une nature différente. Il en résulte des rayons appelés *évanescents*.

8. Muni de ces expressions plus générales des déplacements moléculaires possibles par ondes planes, et en les prenant surtout sous la forme d'exponentielles dont les exposants linéaires ont des coefficients tant imaginaires que réels, Cauchy put donner une admirable analyse de la formation de rayons réfléchis ou réfractés, les uns propageables, les autres évanescents, à la surface de séparation de deux milieux quelconques, dont l'un peut être opaque. Il arriva ainsi, entre autres résultats remarquables, à prévoir des faits de polarisation elliptique, dont de belles et délicates expériences de M. Jamin ont merveilleusement confirmé l'existence annoncée [1], et qui se passent surtout pour des angles d'incidence égaux ou presque égaux à celui sous lequel on regardait, jusque-là, la polarisation par réflexion comme complète.

9. Il fallait, spécialement pour évaluer les *quantités* de lumière réfléchies et transmises sous diverses incidences, pouvoir poser les conditions du *raccordement* des ondes, qui s'opère sur la limite mutuelle de deux milieux, ou les

[1] Divers articles des *Comptes rendus*, vers 1849 et 1850.

relations qui doivent exister entre les mouvements des molécules éthérées en deçà et au delà de leur surface de séparation. On pouvait présumer ce que ces conditions devaient être pour la grande partie, car Fresnel, *a priori*, en avait posé plusieurs, dont il avait déduit des formules vérifiées par des faits nombreux ([1]). Pour obtenir les mêmes résultats principaux avec la théorie nouvelle, Cauchy aperçut qu'il fallait supposer l'égalité, de part et d'autre et à des distances insensibles de la surface de séparation, non-seulement entre les composantes, de même direction, du déplacement des molécules éthérées, mais même entre leurs dérivées premières, prises par rapport à une coordonnée perpendiculaire à cette surface.

Or, il s'agissait de motiver rationnellement ces conditions, dites de *continuité*, ou de changement graduel et non brusque, ni rapide, des mouvements d'un côté à l'autre. Cauchy avait à les rendre compatibles avec sa théorie, où l'éther était supposé avoir des résistances élastiques et aussi des densités différentes dans l'air et dans les divers corps solides où il se trouve répandu.

Cette difficulté a longuement et à bien des reprises occupé Cauchy ([2]). Et l'on peut dire aujourd'hui qu'il ne l'a jamais surmontée, et qu'elle ne pouvait pas l'être.

([1]) Mémoire sur la loi des modifications que la réflexion imprime à la lumière polarisée, t. I de ses *Œuvres complètes*, n° XXX, p. 767 et déjà aux n°s XVI, XVII, XXI, XXIX.

([2]) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 18 mars 1839, t. VIII, p. 374, ou (publié à part) : *Méthode générale propre à fournir les équations de condition relatives aux limites des corps dans les problèmes de Physique mathématique.* — On peut voir déjà aux *Nouveaux Exercices* (Prague, 1835), p. 202, 203, mentionné le *Nouveau principe de Mécanique*, qu'il croit pouvoir avancer, qu'il promet de développer, et qu'il rappelle au t. VIII cité des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, p. 969, dans une réponse à M. Mac-Cullagh; et aussi, au t. XVI (1843), 23 janvier, p. 152, et 1848, t. XXVII, p. 99.

On peut voir au t. X, 17 février 1840, p. 266, l'importance que Cauchy attribuait au *principe* de cette méthode.

En effet, le principe des conditions à remplir aux limites mutuelles des corps, dans l'intérieur desquels diverses forces agissent et divers mouvements se produisent, n'était point à trouver; il résulte de la simple application des théorèmes généraux de la mécanique, sans hypothèses exceptionnelles. Ces conditions, dès 1821, avaient été posées par Navier, qui arrivait, par la méthode générale de la mécanique analytique de Lagrange, à établir à la fois les équations différentielles dites *indéfinies* ou relatives à tous les points de l'intérieur d'un solide élastique, et les équations de condition dites *définies* ou aux *limites*, s'appliquant aux points de la surface enveloppe. Quoiqu'il ne parlât pas de pressions intérieures, il est facile de voir, en comparant ces dernières équations avec les formules de pressions trouvées peu après par Poisson et Cauchy, que les équations de Navier reviennent à égaler les trois composantes des pressions extérieures que les éléments de la surface-enveloppe supportent, avec les composantes, de sens opposé, des pressions intérieures, s'exerçant sur ou à travers les mêmes éléments. C'est aussi en posant pour deux milieux contigus, entre les pressions de part et d'autre de leur face de séparation, de pareilles égalités, ressortissant naturellement des intégrales doubles que l'intégration par parties de Lagrange détache des intégrales triples entrant dans l'équation générale d'équilibre ou des travaux virtuels relative à tout le système, que Green, Mac-Cullagh et M. Neumann établissaient leurs conditions-limites en traitant les problèmes de la réflexion et de la réfraction.

Or, avec l'hypothèse que fait Cauchy, *d'une élasticité inégale de l'éther* dans les milieux de nature différente, l'égalité ainsi posée, soit par une pareille analyse, soit à la suite du plus simple raisonnement, entre les pressions exercées de part et d'autre, ne saurait donner cette *continuité* du mouvement dont il dit qu'il faut adopter le prin-

cipe [1], et qui satisfait aux expériences. Aussi, après avoir exposé ses doutes embarrassants [2], il conclut à rejeter la méthode de Lagrange [3], et jusqu'à l'équation générale de l'équilibre et du mouvement, de l'auteur de la Mécanique analytique [4], comme ne pouvant, dit-il, s'appliquer aux questions du genre de celles qui l'occupent.

10. Mais cette égalité dont nous parlons, des pressions exercées de part et d'autre sur une même surface, ne dépend ni de l'usage du calcul des variations à la manière de Lagrange, ni de l'équation générale, par d et δ, de nullité de la somme des travaux virtuels des forces, tant motrices que d'inertie, dont toute la Mécanique analytique est en quelque sorte le développement. Comme la pression sur un élément de surface n'est autre chose qu'une résultante d'actions moléculaires qui s'exercent à travers sa superficie, le principe général incontesté de l'égalité de chaque réaction à l'action contraire entraîne nécessairement celui de l'égalité des pressions sur ses deux côtés. Et cette égalité doit toujours être posée, si les deux pressions sont supposées n'être exercées que sur une couche d'un mélange, dont on admettrait l'existence, entre les molécules des deux milieux contigus (tels que l'air et le verre); car un prisme de cette couche intermédiaire, qui ne peut être supposée qu'excessivement mince, ne saurait être tenu en équilibre à l'aide des autres actions, qui seraient exercées sur sa surface latérale de hauteur excessivement petite, si ses deux bases, de dimensions incomparablement plus grandes,

---

(1) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. XXVII, p. 100; 1848.

(2) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. XVI, p. 154; 1843.

(3) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. XXVIII, p. 27; 1849.

(4) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. XXVIII, p. 60; 1849.

éprouvaient des pressions sensiblement différentes. Aussi les équations aux limites, dont le premier type se trouve au Mémoire de Navier, et qui mettent simplement en équilibre les pressions venant de l'extérieur et les pressions venant de l'intérieur, se rencontrent aussi aux Mémoires de Poisson, de Lamé, etc.; et Cauchy reconnaît, lui-même [1], les avoir employées avec succès dans ses recherches sur les tiges et sur les plaques élastiques [2], bien qu'il n'ait jamais fait usage du calcul des variations ni de la méthode générale de Lagrange [3].

Vainement chercherait-on à concilier la variation continue des mouvements avec une différence considérable entre les grandeurs des coefficients d'élasticité de l'éther dans les deux milieux, en alléguant que dans la nature il n'y a pas de changement brusque, et que, dans une couche de transition, ces coefficients peuvent avoir toutes les grandeurs intermédiaires. Vu l'extrême minceur d'une pareille couche (si elle existe), les dérivées des coefficients d'élasticité, par rapport à une coordonnée normale, y seront extrêmement considérables, comme il arriverait dans une couche qu'on supposerait servir de lien entre deux corps élastiques pondérables, tels que l'air et un métal. Elles rendront fort considérables aussi, et comme brusques, les différences entre les grandeurs des dérivées des déplacements moléculaires, qui sont des fonctions de ces coeffi-

---

(1) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences;* 2 janvier 1849, t. XXVIII, p. 27.

(2) *Exercices de Mathématiques;* 1828 et 1829.

(3) Cauchy objecte (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* du 15 janvier 1849, t. XXVIII, p. 60), contre l'égalité des pressions exercées des deux côtés de la surface de séparation, qu'il faudrait, pour être autorisé à la poser, tenir compte à la fois des actions des molécules de l'éther et de celles des molécules pondérables entre lesquelles celles-là sont répandues. Mais cette complication, si elle était nécessaire à introduire, ne ferait qu'augmenter la difficulté de la conciliation du principe de continuité de Cauchy avec la différence supposée de résistance élastique de l'éther dans les deux milieux.

cients. Or cela sera contraire, précisément, à cette *continuité*, à cette variation graduelle et fort lente, d'un milieu à l'autre, qu'il faut supposer avec Fresnel et Cauchy, dans les mouvements de l'éther de deux milieux contigus, pour arriver aux résultats que l'expérience a fournis.

11. Ces considérations donnent lieu de penser que l'éther *a la même résistance élastique* dans les corps solides que dans le vide, ainsi que l'ont supposé deux des auteurs dont nous analyserons plus loin les recherches; que ce fluide, ou, pour mieux dire, cet immense solide impondérable est, et par une suite nécessaire, *isotrope*, ou de même contexture élastique dans toutes les directions, aussi bien à l'intérieur des cristaux que dans l'air, l'eau ou le verre, etc.; et qu'il faut chercher, ailleurs que dans des différences de résistance élastique dans plusieurs milieux et en plusieurs sens, la cause de la double réfraction, etc.

12. Aussi bien Cauchy cherchait déjà ailleurs, pendant cette même année 1839, la cause d'autres phénomènes que son analyse de 1830 ne pouvait expliquer. A cet effet, ne conservant de ses précédentes recherches que la forme linéaire et homogène des équations différentielles du second ordre des déplacements très-petits des points de l'éther, il se livra à des considérations purement analytiques tendant à déterminer quelles conditions les coefficients constants de ces équations doivent remplir, pour qu'elles présentent une forme indépendante de la direction des trois axes des coordonnées des mêmes points, ou seulement de deux de ces trois axes [1]. Pour ne parler ici que de ce qui concerne les trois axes à la fois, s'ils peuvent être changés de toutes les manières, c'est-à-dire non-seulement de direction dans l'espace, mais encore de sens les uns par rapport aux

---

[1] *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*, t. I, p. 101 à 132, ou *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 24 juin 1839, t. VIII, p. 985.

autres, en sorte qu'on puisse remplacer l'un d'eux par son opposé, sans changer les deux autres, ou réciproquement, il reconnut que les coefficients se réduisent à deux, affectant, dans chaque équation supposée homogène du second ordre, l'un, une dérivée de la dilatation cubique, l'autre, la somme des trois dérivées secondes, par rapport à chacune des trois coordonnées, d'un même des trois déplacements projetés (u, v, w). Il retrouvait ainsi les équations déjà établies pour l'état élastique appelé par lui *isotrope*.

Mais si les trois axes coordonnés ne peuvent être tournés qu'*ensemble* autour de leur origine, sans changer de sens, si ce n'est tous trois à la fois, l'isotropie analytique n'est pas complète; elle est, comme nous dirons plus loin, *dissymétrique*, ou non accompagnée de symétrie par rapport à des plans; et les équations contiennent alors d'autres termes, affectés *d'un troisième coefficient*, qui multiplie les dérivées de trois binômes différentiels réciproques

$$\frac{dw}{dy} - \frac{dv}{dz}, \quad \frac{du}{dz} - \frac{dw}{dx}, \quad \frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy}.$$

Les moitiés de ces binômes représentent, comme Cauchy l'a montré peu après [1], les *rotations moyennes* des points d'un élément du milieu, autour de parallèles aux trois axes; et les termes qui les contiennent mettent sur la voie d'expliquer les rotations que certains corps ou certaines dissolutions font éprouver aux plans de polarisation.

Mais il s'agissait de savoir quelles dispositions moléculaires peuvent être propres à introduire de pareils termes ou de pareilles relations; et cette pure analyse ne pouvait l'apprendre.

13. Cauchy eut donc, en 1849, tant pour ce point de théorie que pour d'autres, une idée nouvelle, celle d'admettre qu'à l'intérieur des systèmes réguliers et réticulaires de molécules pondérables, disposées en cellules égales et de

---

[1] *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*, t. II, p. 321.

même orientation, qui constituent les cristaux, les atomes éthérés, disposés de la même manière dans toutes les mailles ou alvéoles, l'étaient d'une manière inégale aux divers points de chacune d'elles, d'où il suivait que les équations différentielles linéaires représentant les petits mouvements vibratoires de l'éther des cristaux devaient avoir leurs coefficients, non pas constants, mais *périodiques* (1), à savoir représentables par des fonctions de coordonnées rectangles ou obliques x, y, z, supposées reprendre les mêmes valeurs toutes les fois que ces coordonnées sont augmentées ou diminuées respectivement d'une ou plusieurs fois les trois dimensions imperceptibles a, b, c, des cellules cristallines.

Les déplacements eux-mêmes doivent se composer d'une partie moyenne relative à chaque cellule, et d'une partie périodique, oscillant autour de zéro. On a besoin, pour l'étude des phénomènes, de déterminer seulement les parties moyennes relatives à chaque endroit : mais on ne les obtiendrait pas avec une exactitude qui suffise pour toutes les explications si, dans les équations différentielles des déplacements individuels, l'on remplaçait chaque coefficient périodique par la grandeur moyenne autour de laquelle il oscille lui-même; car on sait qu'en général la valeur moyenne d'un produit peut différer très-sensiblement du produit des valeurs moyennes de ses facteurs, supposés faire, de part et d'autre, des écarts périodiques et réguliers (2). Cauchy indique donc comme à opérer, avant de chercher à intégrer les équations, une première analyse,

(1) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 3 décembre 1849, t. XXIX, p. 641-644; 3, 17 et 23 décembre 1849, t. XXIX, p. 641, 728, 762; et 14 janvier 1850, t. XXX, p. 27.

(2) Si, par exemple, les deux facteurs oscillent autour de zéro, en sorte que leurs valeurs négatives compensent, en moyenne, leurs valeurs positives, comme les produits de celles-là entre elles sont positifs comme les produits de celles-ci, le produit moyen ne sera pas zéro nécessairement.

consistant à remplacer leurs coefficients, ainsi que leurs trois inconnues, par des sommes d'une partie non-périodique et d'un nombre indéfini de termes affectés de puissances de trois exponentielles périodiques, c'est-à-dire à exposants $2\pi\sqrt{-1}$ multipliés par $\frac{x}{a}$ ou $\frac{y}{b}$ ou $\frac{z}{c}$; puis, après les multiplications, à identifier les termes des deux membres contenant leurs trois mêmes puissances. Il en résulte, en divisant de part et d'autre par ces exponentielles, une suite d'équations différentielles linéaires en x, y, z, t, à coefficients constants. Elles sont résolubles, comme on sait, par des sommes de solutions particulières consistant, chacune, dans le produit d'un coefficient aussi constant par une autre exponentielle périodique (dite *caractéristique*), dont l'exposant est une fonction linéaire des mêmes quatre variables x, y, z, t. Ces solutions particulières répondent à des mouvements *simples* ou par ondes planes. En en substituant une dans chacune des équations différentielles, Cauchy les ramène à des équations algébriques du premier degré entre des coefficients constants; puis il observe qu'on peut, en se bornant à un nombre fini de termes des séries, éliminer entre les équations les coefficients des parties périodiques, de manière à avoir, pour les parties moyennes ou non périodiques des déplacements (c'est-à-dire pour ce qu'on veut obtenir), des solutions aussi particulières, qui sont ce que l'on tirerait de trois équations différentielles nouvelles, dites *auxiliaires*, n'ayant que des coefficients constants; équation qu'on peut construire d'après la forme aperçue de leurs solutions [1].

---

[1] Du moins, c'est à ces trois équations, contenant les déplacements moyens, que M. Sarrau (ci-après, n° 18) attribue cette dénomination d'*auxiliaires;* bien que Cauchy ait peut-être voulu désigner ainsi (*Compte rendu* de la séance du 10 décembre 1849, t. XXIV, p. 689) les équations différentielles en nombre indéfini, à coefficients constants, qu'il tire d'abord des trois équations à coefficients périodiques.

Cauchy apercevait que les trois équations différentielles nouvelles, tirées ainsi d'équations primitives du second ordre, contiendraient et fourniraient de ces termes d'ordre supérieur, pairs et impairs, dont on a besoin pour certaines explications désirées.

Mais, suivant une habitude qu'il n'eut que trop à cette époque de sa carrière, où il se contentait ordinairement de jeter de grandes et ingénieuses idées qui débordaient de sa riche imagination, Cauchy ne développa point celle-là dans ses conséquences. Il ne s'aperçut pas, ainsi, que la méthode qu'il indiquait, si on l'emploie de plusieurs manières, dont aucune n'est moins légitime que les autres, peut donner des résultats les uns conformes, les autres contraires à l'expérience, et qui ainsi se contredisent (*Voir* plus loin n° 21). Ce n'est donc point encore là qu'il faut chercher l'explication de ces phénomènes délicats ou de *seconde approximation* qu'on vient de citer, et dont l'importance est si grande.

14. L'analyse de 1830 donnait, aux vibrations des rayons polarisés rectilignement, une direction perpendiculaire au plan de projection du rayon lumineux sur celui des ondes, qu'il coupe obliquement en général. Cela revenait à les rendre parallèles au plan de polarisation, comme ont fait aussi Green, Neumann et Lamé, tandis que dans la théorie de Fresnel les vibrations sont perpendiculaires à ce même dernier plan. Par l'une et par l'autre supposition on obtient, pour l'onde courbe des cristaux à deux axes, la surface de Fresnel; mais l'explication d'autres particularités des phénomènes lumineux paraît exiger la perpendicularité aux plans de polarisation. Cauchy a donc cherché comment il pourrait l'obtenir dans son système d'inégale élasticité de l'éther suivant trois directions. Il n'y parvint qu'en imposant, indépendamment des quatre conditions dont on a parlé ci-dessus (n°s 4 et 5), deux autres conditions, qui reviennent, en dernière analyse, à ce que l'éther qui est

logé dans l'intérieur des cristaux se trouverait constamment soumis, par cela seul, et suivant les directions rectangulaires de leurs trois axes principaux de contexture, à trois pressions normales, dont les différences deux à deux sont justement égales aux trois différences, aussi deux à deux, de ses trois coefficients correspondants de résistance élastique au glissement relatif des parties [1]. Cela est fort peu probable et même difficilement possible, en sorte que si la perpendicularité, voulue par Fresnel, est réelle, comme il n'y a guère lieu d'en douter, et s'il n'y a pas d'autre moyen que celui-là de l'obtenir dans l'hypothèse de l'inégale élasticité de l'éther suivant diverses directions, elle offre une puissante raison de plus pour rejeter cette inégalité.

15. Les vibrations longitudinales ou quasi longitudinales et non lumineuses que fournit analytiquement l'assimilation de l'éther à un solide élastique sont regardées, par la plupart des géomètres-physiciens, comme un embarras. Bien que Cauchy eût fait en 1830 [2], aux objections que soulevait leur apparition dans les formules, une réponse simple, à laquelle on peut ajouter d'autres raisons [3], il chercha encore en 1839 la condition pour que le rayon *non éclairant* n'existe pas dans ce qui vient du corps lumineux, et pour que, s'il se forme aux dépens d'une petite partie de la

---

[1] Mémoire *sur la polarisation rectiligne et la double réfraction*, du 20 mai 1839 (imprimé au t. XVIII, 1843, des *Mémoires de l'Académie des Sciences*).

En effet, dans l'égalité (142) $P - G = Q - H = R - P$ du § I de ce Mémoire, G, H, I sont, dans les trois sens x, y, z, les composantes normales de pressions antérieures aux déplacements moléculaires vibratoires, et persistantes ; et P, Q, R sont les coefficients de résistance élastique au glissement.

Voir aussi une Note insérée au *Compte rendu de la séance de l'Académie des Sciences* du 17 août 1863, t. LVII, p. 389.

[2] *Bulletin Férussac*, t. XIII, n° 217, p. 425.

[3] Mémoire *Sur la distribution des élasticités*, de 1863, n° 24 (*Journal de Mathématiques*).

lumière dans la réflexion et la réfraction de celle-ci, il s'éteigne à une distance imperceptible de la surface où il a pris naissance.

Pour cela, se bornant aux milieux complétement isotropes, il trouva [1] pour cette condition que les deux coefficients du cas d'isotropie parfaite ou symétrique, dont on a parlé (n° 12) comme d'un résultat d'analyse pure, et qu'il a appelés ι et ιf, devaient avoir une somme nulle, ou que $1 + f = 0$. Et il trouve même que cette somme $1 + f$ devrait être un peu au-dessous de zéro pour que les vibrations longitudinales créées par l'acte de la réflexion et de la réfraction s'éteignent à peu de distance [2].

D'après les calculs d'actions moléculaires qui l'avaient conduit aux mêmes équations pour les solides isotropes, on aurait $\iota f = \frac{2G}{\rho}$, et $\iota = \frac{G + P_0}{\rho}$, ρ représentant la densité, G le coefficient d'élasticité de glissement de la matière, et P_0 la pression ou plutôt la traction ou tension égale en tous sens, que l'éther isotrope éprouvait déjà avant les petits déplacements de ses molécules, et éprouve encore en sus de ce qui provient à chaque instant de ces déplacements en chaque endroit.

Il faudrait donc $P_0 + 3G = 0$ et même un peu au-dessous de zéro. Cela est d'accord avec ses premières recherches, d'après lesquelles le carré de la vitesse de propagation des ondes à vibrations longitudinales est $\frac{P_0 + 3G}{\rho}$. Et cela reviendrait, avec la notation de Lamé, à $\lambda + 2\mu =$ ou < 0, car $\iota = \frac{\mu}{\rho}$, $\iota f = \frac{\lambda + \mu}{\rho}$. Cette condition, au premier abord, ne

(1) *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*, t. I, p. 214, 242 ; ou *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 25 novembre 1839, t. IX, p. 677, et 2 décembre, p. 727.

(2) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 9 décembre 1839 t. IX, p. 765.

paraît pas impossible, vu qu'en n'attribuant aux molécules de l'éther que des actions mutuelles répulsives et rapidement décroissantes avec l'inverse de la distance moléculaire, P_0 et G semblent pouvoir avoir des signes différents. Mais la difficulté ainsi évitée fait place à d'autres; car il est difficile que le carré $\frac{P_0 + G}{\rho}$, de la vitesse de propagation des ondes à vibrations transversales soit positif si $\frac{P_0 + 3G}{\rho}$ est nul ou négatif. Peut-être que de très-fortes agitations de l'éther, étrangères à celles qui se propagent et éclairent, rendent l'intensité moyenne de l'action mutuelle de deux molécules éthérées très-différente de l'intensité réelle de l'action qui répondrait à leurs situations moyennes ou de repos; en sorte que les coefficients ι et ιf ne seraient plus ce qu'ils semblent être d'après les calculs de la mécanique moléculaire, faits pour un état moyen ou statique. Mais, plutôt que de tenter d'après cela quelque explication nouvelle, il conviendrait probablement de laisser à l'avenir la tâche de dévoiler le mystère, et de déterminer ce que deviennent les vibrations longitudinales de l'éther, comme ce que peuvent devenir aussi des vibrations transversales tout aussi invisibles, et dont la formation, au contact des corps lumineux, est aussi probable que celle des vibrations dont la longueur d'onde se trouve dans les justes limites de la perceptibilité reconnue. La difficulté aura été heureuse, si sa solution future se trouve liée à quelque vue plus complète, à quelque découverte capitale qu'il serait prématuré de pressentir.

16. Parmi les disciples et les continuateurs de Cauchy, il faut distinguer d'une manière toute particulière M. Briot. Le savant maître de conférences, connu par de beaux travaux d'analyse pure, et par des traités où la lucidité et la concision se rencontrent presque constamment alliées, commença en 1859 à s'occuper des phénomènes lumineux,

et présenta jusqu'à la fin de 1863 quatre Mémoires [1], qu'il fit suivre, en 1864, de la publication d'un opuscule très-substantiel où, sous le titre d'*Essais sur la Théorie de la lumière* [2], il reproduisit, en les coordonnant, ses vues nouvelles, et y joignit, sous forme condensée, tout ce qu'il conservait de la théorie de Cauchy. La réflexion et la réfraction étaient exceptées : il les traita, depuis, d'une manière complète, dans deux Mémoires de 1866 et 1867 [3].

Il pose, comme Cauchy faisait en 1830, des équations de mouvement de l'éther fondées sur un calcul de résultantes d'actions exercées sur une molécule par toutes celles qui l'environnent à de petites distances, leurs intensités moyennes étant supposées fonctions des moyennes des distances moléculaires, que des vibrations étrangères aux phénomènes lumineux peuvent faire changer continuellement.

Il montre tout d'abord que l'éther, dans les corps cristallisés, ne peut pas affecter lui-même une structure cristalline, comme Cauchy le pensait en 1830; car s'il en était ainsi, observe M. Briot, les cristaux du système cubique polariseraient la lumière, contrairement à l'expérience. Si, comme il le pense avec Cauchy, l'éther est hétérotrope dans les cristaux des autres systèmes, il ne peut s'y trouver qu'à l'état d'inégale compression dans deux ou trois sens rectangulaires, ce qu'on a vu plus haut (n°s 5 et 14) résulter de l'une comme de l'autre des deux manières dont

---

(1) 5 décembre 1859, *Propagation de la lumière dans les milieux cristallisés;* 16 janvier 1860, *Polarisation circulaire;* 4 mars 1861, *Note sur la théorie de la lumière;* 23 novembre 1863, *Sur la dispersion* (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. XLIX, p. 888; L, p. 141; LII, p. 393; LXIII, p. 868).

(2) *Essai sur la Théorie mathématique de la lumière*, in-8°; 1864.

(3) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 24 décembre 1866, t. LVIII, p. 1112, et *Journal de Mathématiques*, septembre 1866, p. 305.

Sur la réflexion et la réfraction cristallines, même journal, juin 1867, p. 185.

Cauchy a obtenu, au moins approximativement, la surface de Fresnel.

Dans le système prismatique régulier, ou à *un* axe, le calcul fait par M. Briot montre que le rayon ordinaire a ses vibrations moléculaires perpendiculaires à l'axe du cristal, et exactement transversales ou parallèles au plan des ondes, tandis que les vibrations du rayon extraordinaire ne sont que quasi transversales, ou font un petit angle avec ce plan.

La polarisation circulaire exige la dissymétrie de structure du cristal solide, ou des molécules intégrantes répandues dans la dissolution où s'accomplit ce phénomène, qui ne s'explique bien, avec ses lois constatées, qu'en admettant, dans les équations différentielles du mouvement, des termes du troisième ordre suffisamment grands pour influer. M. Briot introduit ces termes au moyen de la supposition, faite par Cauchy en 1849, d'inégalités périodiques dans la distribution des atomes de l'éther; il en développe, à ses *Essais* de 1864, les calculs, dont il n'avait fait qu'indiquer le résultat en 1860. Au mémoire ou à la Note de 1861, il montre que le fait, expérimentalement établi, de la constance de la vitesse de propagation du rayon *ordinaire* produit par les cristaux à un axe quel que soit l'angle fait avec cet axe par l'onde incidente, exige que les vibrations soient, comme le pensait Fresnel, perpendiculaires au plan de polarisation.

17. Le dernier des quatre Mémoires de M. Briot, antérieurs à 1864, est relatif à la dispersion. L'auteur montre clairement qu'elle ne saurait être expliquée (ainsi que nous avons dit au n° 6) comme l'avait espéré Cauchy, en tenant compte des termes différentiels d'ordre pair et supérieur au second, notamment ceux du quatrième ordre, dans les développements de Taylor exprimant les différences entre des déplacements de molécules voisines; car ces termes, s'ils pouvaient avoir une influence notable, donneraient, pour

les rayons diversement colorés, des vitesses de propagation différentes aussi bien dans le vide ou les espaces célestes que dans les corps solides tels que le verre ; or cela est contraire à ce qu'apprend l'observation des étoiles changeantes. En conséquence, M. Briot fait dépendre aussi la dispersion des termes que fournit la supposition d'une distribution périodique de l'éther. Il montre qu'en astreignant à certaines conditions la forme de la fonction des distances entre molécules, qui mesure l'intensité de leur action reconnue répulsive, on peut remplir toutes celles qu'il pose pour les diverses explications, notamment celle de la constante vitesse de propagation du rayon dit *ordinaire*. Si la fonction est, par exemple, supposée algébrique et monôme, c'est-à-dire inverse d'une certaine puissance de la distance moléculaire, M. Briot montre que cette puissance devrait être la sixième. Il ne cherche pas, dans ses écrits de 1859 à 1864, à annuler, comme l'avait tenté Cauchy, les vibrations longitudinales (n° 15), ce qui, toujours avec la forme monôme, exigerait la puissance $\frac{2}{3}$ au lieu de la puissance 6, et entraînerait des impossibilités. On peut voir, cependant, dans son Mémoire de 1866, relatif à la réflexion et à la réfraction à la surface de séparation de deux milieux isotropes, qu'il regarde comme possible cette annulation, ou cette prompte extinction des vibrations longitudinales [1]; ce qui entraînerait à renoncer à la loi de répulsion trouvée dans ses écrits précédents, où il la proposait sans doute simplement comme exemple analytique.

Du reste, dans ce Mémoire de 1866, et dans celui de 1867 qui est relatif à la réflexion et à la réfraction par les cristaux, M. Briot donne, de ce double phénomène, une théorie

---

[1] *Journal de Mathématiques*, t. XI, p. 319 et 325, nos 15 et 22 du Mémoire. Son analyse est empruntée en partie au Mémoire de Cauchy du 2 mars 1840 (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. X, p. 347).

complète et mathématiquement exacte, en partant, comme de chose établie, du *principe de continuité*, en effet incontestable, de Cauchy et de Fresnel, auquel il donne même, dit-il, plus d'extension.

En cherchant à motiver théoriquement ce principe (*voir* ci-dessus, n° 9), il ne parle point de la pression mutuelle des deux milieux, qui avait été considérée par Green, par Mac-Cullagh, par Neumann, et, avant eux, dans des questions dont l'analogie n'est point douteuse, par Lagrange, Poisson et Cauchy lui-même. S'il l'avait considérée, il eût aperçu, sans aucun doute, que ce principe de continuité des mouvements, adopté pour ses conséquences, n'est point compatible avec la supposition, faite d'après Cauchy, d'une élasticité différente de l'éther dans les deux milieux que sépare la surface où s'opèrent la réflexion et la réfraction.

18. Bien que M. Sarrau, ingénieur des manufactures de l'Etat, dans ses deux remarquables *Mémoires sur la propagation et la polarisation de la lumière dans les cristaux* (1), ne se soit point occupé de la réfraction et de la réflexion (2), il a adopté une supposition avec laquelle la difficulté que nous venons de signaler dans leur explication n'existe pas. Il a en effet, et pour un autre motif, supposé que dans tous les milieux l'éther a la même élasticité, ou oppose la même résistance au déplacement relatif de ses parties; que cette résistance élastique est aussi la même en tous sens autour de chaque point, en sorte que, jusque dans l'intérieur des alvéoles ou cellules intermoléculaires égales et semblablement orientées dont les cristaux se composent, l'éther ne cesse nulle part d'être isotrope.

---

(1) Présenté en 1865 : *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 5 juin, t. LX, p. 1174, et publié au *Journal de Mathématiques*, janvier et février 1867, p. 1 et 33; février et mars 1868, p. 59 et 88.

(2) Si ce n'est dans un très-court passage, n° 4 du chapitre IV, p. 87 de son deuxième Mémoire.

Mais, d'un point à l'autre de chaque cellule, il admet que *sa densité change,* à cause de l'attraction qu'exerce sur lui la matière pondérable, en sorte que cette densité de l'éther est une fonction périodique des coordonnées des points du milieu cristallin où il se trouve disséminé.

Cette périodicité (celle de la densité) est la seule dont la théorie de M. Sarrau exige l'existence dans la constitution de l'éther des cristaux. Elle lui suffit, sans avoir besoin de spécifier la forme de la fonction représentant la variation de la densité dans chaque cellule, pour tirer, à la manière de Cauchy (n° 13), des équations différentielles du second ordre à coefficients périodiques où se trouvent engagés les déplacements effectifs des atomes éthérés, ces équations, dites *auxiliaires,* à coefficients constants, où n'entrent plus que leurs parties non périodiques, c'est-à-dire les déplacements moyens locaux, et qui contiennent, avec leurs dérivées du second ordre, ces dérivées d'ordre supérieur, spécialement du troisième et du quatrième ordre, qu'on a dit être nécessaires aux explications de la double réfraction circulaire et de la dispersion.

Je n'ai pas besoin de citer et d'analyser ici, avec l'éloge que méritent les diverses parties de ce beau travail, la manière élégante dont il développe et interprète d'abord, dans toute sa généralité, l'idée de Cauchy, en en résumant l'application dans un théorème qui fournit sans calcul les équations auxiliaires; ni la série si bien ordonnée des variétés de forme qu'il donne aux équations suivant les diverses symétries, etc., de structure cristalline définies géométriquement par Bravais, et expérimentalement par les minéralogistes et les physiciens. Qu'il me suffise de dire que tous les résultats des expériences, même les plus singuliers, tels que ceux qui sont offerts par le quartz, le chlorate de soude, l'acide tartrique, etc., se rangent dans les explications qu'offrent ses équations, avec la spécialité que leur imprime la structure constatée de chaque cristal; en sorte que

son dernier chapitre peut, comme il le dit [1], servir de complément et de commentaire aux dernières recherches de Fresnel, en mettant en outre les expérimentateurs sur la trace de nouveaux sujets de recherches.

19. M. Sarrau se débarrasse hardiment et nettement des vibrations longitudinales en faisant [2] la supposition un moment indiquée par Cauchy, revenant (n° 15) à $\iota + \iota f = 0$, ou $P_0 + 3G = 0$, ou $\lambda + 2\mu = 0$ suivant les notations, et qui reproduit exactement, dit-il, les faits d'observation, en donnant « une extrême simplicité aux équations des phénomènes »; supposition dont il serait difficile de préciser la cause physique, mais dont on peut, continue-t-il, retrouver l'origine dans une hypothèse de Fresnel sur la constitution de l'éther. Comme les deux termes du binôme qu'il annule ainsi sont deux fonctions de la densité de l'éther [3], on voit que l'*inaptitude* de cet agent à propager des vibrations longitudinales, *quelle que soit sa densité*, que M. Sarrau fait varier comme on a dit, viendrait de ce qu'une certaine fonction $\varphi(\rho) + \psi(\rho)$ de cette même densité ρ serait constamment zéro *malgré le changement de grandeur de sa variable*. Il faut convenir que c'est une propriété un peu difficile à admettre dans une fonction.

Quoi qu'il en soit, M. Sarrau obtient ainsi, entre autres choses, la perpendicularité, supposée par Fresnel, des vibrations rectilignes au plan de polarisation, et même au rayon lumineux de l'intérieur des cristaux biréfringents; ce qui fait faire généralement à ces vibrations un petit angle avec le plan des ondes.

20. La *dispersion* n'entrait pas dans le programme que M. Sarrau s'était imposé par le titre de son Mémoire, pro-

---

(1) N° 8, du chapitre III du deuxième Mémoire, p. 83.
(2) N° 16, ou fin du chapitre II du deuxième Mémoire, p. 78.
(3) Nos 4 et 5 du chapitre III, p. 81.

gramme qu'il a abondamment rempli par son analyse toujours féconde et aux larges allures. Il s'est donc borné à dire [1] que les termes différentiels d'ordre supérieur au second, qu'engendre le passage des équations à coefficients périodiques aux équations à coefficients constants, sont propres à expliquer ce phénomène comme les autres. Si l'habile analyste avait voulu traiter de la dispersion avec détail, je pense qu'il aurait, avec ses habitudes d'exactitude, éprouvé quelque embarras. Les verres ont un pouvoir dispersif considérable : or, puisqu'ils sont isotropes, vu que « leurs molécules n'ont entre elles aucun arrangement déterminé », l'éther de leur intérieur ne saurait offrir cette disposition par cellules égales et de même orientation, produisant la périodicité régulière dont on a pu dégager les termes différentiels propres aux explications désirées. Dans un verre, la densité moyenne de l'éther, variable d'un espace intermoléculaire à l'autre, peut bien être sensiblement constante quand on prend un grand nombre d'espaces ; mais cette *loi des grands nombres* ne constitue pas une périodicité ; ou bien elle constitue ce qu'on pourrait appeler une périodicité indéterminée si l'on veut absolument voir dans cette sorte d'alternance quelque chose de périodique. Nous avons dit (n° 15) que deux quantités périodiques dont chacune a zéro pour moyenne pouvaient avoir un produit moyen différent de zéro : et, en effet, si chacune des deux quantités dont on parle est représentée par l'ordonnée variable d'une courbe sinueuse laissant, entre elle et l'axe des abscisses, des aires d'égale superficie au-dessus et au-dessous de cet axe rectiligne, et si l'on trace une autre courbe dont les ordonnées soient proportionnelles aux produits des deux ordonnées de celles-ci pour la même abscisse, comme les produits d'ordonnées

---

[1] N° 9 du chapitre III, p. 89.

négatives sont positifs, ainsi que ceux d'ordonnées positives, la troisième courbe pourra offrir une somme d'aires positives bien plus considérable que la somme d'aires négatives qu'elle offre aussi; d'où *une ordonnée moyenne positive*. Mais cela ne peut avoir lieu que sous des conditions de concordance, telles que celles qui peuvent être offertes par une périodicité régulière, jointe à la commensurabilité des périodes. Si l'on a deux lignes très-sinueuses sans régularité, où, pour une certaine longueur d'abscisses, les ordonnées positives équidistantes et suffisamment nombreuses compensent très-approximativement, en somme totale pour chaque ligne, les ordonnées négatives, la même compensation approchée devra s'établir entre la somme de leurs produits positifs et la somme de leurs produits négatifs; car, vu le défaut absolu de régularité dans les changements d'un sens à l'autre, il n'y a *aucune probabilité* pour qu'une de ces deux sommes de produits soit plus grande que l'autre. Le produit moyen des ordonnées, répondant aux mêmes abscisses, sera donc zéro comme les facteurs moyens.

Si l'on allègue que toute fonction peut être représentée et exprimée par une série de quantités *régulièrement* périodiques, telles que des cosinus ou des exponentielles imaginaires, il peut être répondu que, lorsque la fonction est d'une grande complication, le nombre des termes de la série doit être pris excessivement grand; et cette ressource de représentation d'expressions manque même lorsque la fonction est indéterminée, ou changeante quand on passe d'un point à un autre point, ou d'une file de molécules à une autre file. Il n'est donc permis, dans aucun cas, pour l'intérieur d'un verre, de représenter la densité de l'éther et ses déplacements par des séries périodiques réduites à un nombre limité de leurs termes, comme on fait finalement lorsqu'on emploie le procédé de Cauchy. Ce serait, en effet, remplacer arbitrairement le verre par un cristal,

cubique ou autre, et l'on n'aurait de la dispersion qu'une explication illusoire et comme subreptice.

M. Sarrau, d'après le titre de son Mémoire, relatif aux *cristaux*, n'a pas eu à parler, non plus, des dissolutions salines ou saccharines qui impriment des rotations aux plans de polarisation. S'il l'avait tenté, toujours au moyen des équations qui sont le résultat d'une supposition de périodicité régulière de la variation de densité de l'éther, il aurait certainement rencontré la même difficulté que pour la dispersion produite par les matières vitreuses et amorphes.

21. La périodicité, d'ailleurs, même régulière, même cristalline, donne lieu, dans sa mise en œuvre, à une autre difficulté plus grave peut-être. M. Sarrau divise constamment, par la densité ρ de l'éther (comme avait fait Cauchy), les divers termes de ses équations différentielles, en sorte qu'au lieu de les écrire comme elles ont été posées pour la condition de l'équilibre dynamique, ou de leur donner pour premiers membres, comme Cauchy, Poisson, Lamé, etc., $\rho\frac{d^2u}{dt^2}$, $\rho\frac{d^2v}{dt^2}$, $\rho\frac{d^2w}{dt^2}$, il écrit $\frac{d^2u}{dt^2}$, $\frac{d^2v}{dt^2}$, $\frac{d^2w}{dt^2}$ pour ces membres, u, v, w étant les déplacements en trois sens y, x, z. Il s'ensuit, comme il suppose l'élasticité constante, et constants par conséquent les coefficients d'élasticité qui affectent, dans les seconds membres, les dérivées de u, v, w par rapport aux coordonnées, que le seul coefficient périodique qui figure dans ses équations est l'inverse $\frac{1}{\rho}$ de la densité, ou plus généralement, comme il le suppose, une fonction de ρ, appelée e [1]. C'est à cette fonction de la densité, affectant ainsi tout le second membre de ses équations, qu'il substitue sa valeur moyenne constante, plus des termes périodiques, en faisant des substitutions semblables pour

[1] T. XIII, p. 82 (n° 6 déjà cité du chapitre III du deuxième Mémoire).

les déplacements u, v, w; d'où il tire à la manière de Cauchy, et pour les diverses formes cristallines, les équations avec déplacements moyens (les auxiliaires). Elles lui fournissent, pour la double réfraction et la polarisation rotatoire, etc., des lois de proportionnalité conformes aux expériences.

Mais le facteur ρ aurait pu tout aussi bien être laissé dans le premier membre. En égalant à une quantité périodique, suivant l'hypothèse, cette valeur variable de la densité, au lieu d'y égaler son inverse $\frac{1}{\rho}$, comme ρ affecte une dérivée seconde *par rapport au temps*, tandis que $\frac{1}{\rho}$, de l'autre manière, affectait des dérivées secondes *par rapport aux coordonnées*, on conçoit que le résultat ne soit pas le même, et qu'il rende ce dont on cherche la loi proportionnel à autre chose. C'est ce qui arrive en effet. De cette seconde manière, la plus naturelle des deux, se dégagent des lois fausses, contraires à l'expérience, et consistant en ce que le pouvoir biréfringent, au lieu d'être sensiblement indépendant de la longueur d'onde, serait en raison inverse de son carré, tandis que le pouvoir rotatoire, qui est à peu près en raison inverse du carré de la longueur d'onde, serait en raison inverse de sa quatrième puissance. La dispersion seule est explicable de cette seconde manière comme de la première.

Cette conception d'équations à coefficients périodiques, que le grand analyste a livrée à ses disciples à venir, avec le moyen de déduire et d'éprouver ses conséquences, rendra peut-être des services dans d'autres ordres de questions, mais on voit qu'elle n'est pas propre à résoudre les difficultés qu'offrent les parties délicates de la théorie de la lumière.

22. On ne saurait aussi se le dissimuler: une densité variable, jointe à une élasticité constante, est bien difficile

à admettre dans l'éther. Soit qu'on regarde ses atomes comme s'attirant et se repoussant suivant leur distance plus ou moins grande, ou comme se repoussant seulement avec une intensité qui dépend aussi de la distance, il est inévitable de conclure que, lorsque leur rapprochement devient autre, la résistance aux petits changements nouveaux de leurs distances doit être autre aussi.

Une variabilité de densité de l'éther, à l'intérieur des corps terrestres, doit-elle forcément être introduite dans les calculs? Je ne le vois nullement. J'admets comme possible qu'auprès des molécules pondérables l'éther soit plus dense à cause de leur attraction; mais il est à présumer que c'est seulement en couche fort mince, comme l'eau et l'air peuvent aussi se trouver, sur une épaisseur capillaire, tout auprès des corps solides qui y voltigent ou y flottent; ce qui n'a, sur la manière de se comporter de l'ensemble, qu'une influence probablement insensible. Un pareil changement de densité peut donc être négligé dans les calculs mécaniques, sans crainte d'erreur, si l'on peut s'en passer pour les explications, ou s'il n'en fournit que d'illusoires.

23. Ces considérations graves font désirer fortement que l'idée fondamentale sur laquelle Cauchy a basé une théorie rationnelle de la lumière reçoive un complément et des accessoires nouveaux, propres à fournir, de ses phénomènes divers, des explications que les difficultés et les impossibilités présentées ne puissent atteindre. Tout le monde aussi souhaite que l'ensemble offre, s'il est possible, un caractère simple, avec des suppositions naturelles, dont la mise en œuvre analytique s'exécute sans longs calculs, de manière à pouvoir bientôt, dans l'enseignement des écoles, se substituer aux théories incomplétement mathématiques, dont on a été forcé de se contenter jusqu'ici.

Cette pensée a vivement excité, dès 1865 [1], le zèle et

[1] *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 3 juil-

l'esprit de recherche d'un professeur du collége de Gap, M. Boussinesq, qui, quoique jeune [1], est connu aujourd'hui par des travaux déjà nombreux de mécanique, d'hydrodynamique, d'analyse et de physique mathématique [2]. Je crois, après examen, que ce qu'il a proposé à son Mémoire du 5 août 1867, *Théorie nouvelle des ondes lumineuses* [3], précédé et suivi de deux autres [4], insérés

---

let 1865, t. LXI, p. 19. *Essai sur la théorie de la lumière* (note présentée par M. Lamé).

[1] Né le 13 mars 1842.

[2] Ses divers écrits se trouvent : au t. XX des *Savants étrangers* (Ondes liquides ; houle et clapotis pour une profondeur finie quelconque de la mer); aux t. XIII à XVII (2e série, 1868-1872) du *Journal de Mathématiques* de M. Liouville (Optique; mouvement de la chaleur dans des solides athermanes, de contexture symétrique ou dissymétrique; flexion, torsion, extension et vibrations des tiges élastiques quand les forces sont appliquées vers leurs extrémités d'une manière quelconque; plaques élastiques, question du nombre des équations à leur contour, etc.; écoulements réguliers des fluides dans des tubes droits ou courbes, eu égard aux frottements mutuels de leurs filets; ondes et intumescences positives ou négatives, stables ou instables, dans un canal); enfin aux t. LXI à LXXIV (1865-1872) des *Comptes rendus* (Mêmes sujets, et, en outre : Chocs de veines liquides, et action capillaire, à l'état de mouvement; calcul des écoulements par des orifices en mince paroi en ayant égard à la nullité de la vitesse du liquide à leur centre; deuxième approximation dans la solution du problème de la poussée des terres; solution prompte et sûre des équations trancendantes qui se rencontrent dans des problèmes de physique; faîtes et thalwegs du sol; mouvements permanents ou non permanents dans les cours d'eau en ayant égard à l'influence de l'agitation tourbillonnaire plus ou moins grande sur l'action latérale mutuelle des couches fluides; mêmes mouvements en tenant compte des forces centrifuges; intégration, par coordonnées courbes, d'équations de la *plasticodynamique*, etc.)

[3] *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXV, p. 235; et *Journal de Mathématiques*, t. XIII, 1868, p. 313. — Addition à ce Mémoire, p. 425.

[4] *Sur les ondes dans les milieux isotropes déformés. Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 22 juillet 1867, t. LXV, p. 167, et *Journal de Mathématiques*, 1868, t. XIII, p. 209. — *Études sur les vibrations rectilignes et sur la diffraction dans les milieux isotropes et dans l'éther des cristaux. Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 21 octobre 1867, t. LXV, p. 672, et *Journal de Mathématiques*, t. XIII, 1868, p. 340.

aussi au Journal de M. Liouville, est propre à conduire au but désiré.

Dans ce Mémoire d'août 1867, il suppose, comme a fait M. Sarrau, l'éther constamment isotrope et, aussi, mécaniquement homogène ou partout de même élasticité; mais, de plus, également partout de même densité, en un mot identique, sous tous les rapports, à ce qu'il est dans le vide ou dans les espaces célestes. D'autre part, et revenant à une idée émise par lui, en 1865, M. Boussinesq fait participer, dans les milieux pondérables, leurs molécules aux vibrations de l'agent subtil qui en occupe les interstices.

Cette participation des molécules pondérables au mouvement « de l'éther qui les environne de toutes parts » paraissait « probable » à Fresnel (1). Divers passages d'autres auteurs pourraient prouver qu'ils pensaient de même. Mais la difficulté du calcul de ces partages de mouvement les arrêtait; et Cauchy, essayant un calcul de ce genre-là (2) et se tenant à un certain degré d'approximation (3) ne tirait de son Mémoire « sur les mouvements infiniment petits de deux systèmes de molécules qui se pénètrent mutuellement » aucune autre conséquence que celles auxquelles le conduisait le calcul du mouvement d'un seul système, savoir celui des molécules éthérées, supposé modifié d'une manière purement *statique* par son insertion au second système resté immobile.

M. Boussinesq envisage ce qui se passe d'une autre manière. Abstrayant, comme devant être sans influence sensible sur les phénomènes lumineux, les actions des molécules pondérables des corps transparents les uns

(1) *Premier Mémoire sur la double réfraction*, du 19 novembre 1821. (*Œuvres complètes*, t. II, p, 278, note.)

(2) *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*, t. I, p. 33.

(3) *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*, t. I, p. 43, 52.

sur les autres [1], il suppose que celles de l'éther, beaucoup plus nombreuses, mais d'une masse totale bien moindre, leur communiquent des vitesses très-petites, donnant cependant naissance à des *quantités de mouvement* ou à des *inerties* qu'on ne saurait négliger, bien qu'on puisse le faire généralement pour les *forces vives* qui dépendent de leurs carrés. Il s'ensuit qu'en posant les équations d'équilibre dynamique de l'unité de volume d'un élément du mélange (par exemple celle où entrent les composantes de forces parallèles à la coordonnée x), il faut égaler la somme des actions motrices venant de l'éther extérieur à cet élément, non pas à la valeur $\rho \frac{d^2u}{dt^2}$ de la seule inertie de son éther propre, mais à la somme $\rho \frac{d^2u}{dt^2} + \rho_1 \frac{d^2u_1}{dt^2}$ de celle-ci et de celle de sa matière pondérable, u et u_1, ρ et ρ_1 étant respectivement leurs petits déplacements suivant x, et leurs densités.

On a donc simplement à poser les trois équations ordinaires et connues du mouvement d'un système élastique complétement isotrope et homogène, avec deux termes au lieu d'un seul dans les premiers membres, qui contiennent les dérivées, par rapport au temps des déplacements des molécules.

24. Maintenant, comment assigner des valeurs à ces petits déplacements u_1, v_1, w_1 des molécules pondérables dans les sens x, y, z des coordonnées? M. Boussinesq, à cet effet, admet qu'elles vibrent constamment *en concordance* avec les molécules de l'éther qui les entoure et qui les sollicite comme fait un liquide à l'égard de petits corps qui y flottent; en sorte que, dès que les molécules éthérées reviennent à leurs positions de repos, les molécules pon-

---

[1] Ainsi qu'il le démontre par la considération des vitesses comparées de la lumière et du son.

dérables y reviennent sensiblement aussi, leurs actions mutuelles n'ayant été mises en jeu que d'une manière négligeable, vu la petitesse relative de leurs déplacements u_1, v_1, w_1.

Il substitue donc à ces déplacements inconnus u_1, v_1, w_1 des molécules pondérables, des fonctions des déplacements u, v, w des molécules de l'éther et de leurs dérivées de divers ordres par rapport aux coordonnées; fonctions qu'il fait linéaires, vu que la petitesse de ces déplacements et dérivées permet des développements de leurs fonctions par des séries de Maclaurin à plusieurs variables u, v, w, $\frac{du}{dx}, \ldots$ réduites à leurs termes du premier degré.

Les déplacements de la matière pondérable peuvent sans doute dépendre aussi des vitesses de l'éther, c'est-à-dire des dérivées $\frac{du}{dt}, \ldots$ de ses déplacements par rapport au temps t; mais, excepté pour l'explication d'un seul phénomène, celui de l'action du magnétisme (*voir* plus loin, n° 30), qui imprime au milieu un genre exceptionnel de dissymétrie, M. Boussinesq, en s'occupant des corps transparents, n'a pas eu besoin d'avoir égard à ces dérivées $\frac{du}{dt}, \ldots$ qui ne peuvent être qu'extrêmement peu influentes.

Le principal terme des expressions de u_1, v_1, w_1, simplement proportionnel au déplacement correspondant u, v, w de l'éther, suffit pour expliquer la propagation de la lumière dans les corps avec une vitesse moindre que dans l'éther libre, et aussi, comme on le verra plus loin, la double réfraction ordinaire ou rectiligne; car, dans les équations différentielles, ce terme produit simplement l'effet d'une augmentation de l'inertie de l'éther dans un rapport constant, qui n'est pas le même suivant les trois axes coordonnés quand le corps est hétérotrope.

Les termes suivants, contenant les dérivées de u, v, w,

lui suffisent, dans les développements linéaires substitués aux déplacements (u_1, v_1, w_1) du corps pondérable, pour expliquer les autres phénomènes. Elles introduisent en effet, de suite, et avec le maximum de simplicité, par la substitution de ces développements dans les $\frac{d^2 u_1}{dt^2}$, $\frac{d^2 v_1}{dt^2}$, $\frac{d^2 w_1}{dt_1}$, ces dérivées de u, v, w d'ordre supérieur au second, du troisième et du quatrième ordre surtout, dont les faits indiquaient l'existence et la valeur sensible, et qu'on a reconnues nécessaires pour la polarisation rotatoire et la dispersion; sans que ce que l'on en tirera pour ce dernier phénomène ait, comme la première tentative de Cauchy (n°s 6 et 15), l'inconvénient, très-bien signalé par M. Briot, de s'appliquer même aux espaces vides de matière pondérable.

25. On conçoit aussi, à l'égard des coefficients constants et d'abord indéterminés qui affectent les déplacements de l'éther et leurs dérivées dans les expressions polynomes de ceux des molécules pondérables, qu'il peut toujours être fait un choix de leurs valeurs relatives, en harmonie avec le mode de contexture de chaque corps transparent, et qu'on puisse ainsi rendre compte rationnellement de tout ce qu'offre de particulier la lumière qui le traverse. Les molécules ou groupes atomiques de divers corps doivent en effet, suivant leur différent rapprochement en différents sens, et aussi suivant leur forme, offrir des mobilités inégales, ou avoir plus ou moins de facilité, dans certaines directions que dans d'autres, à se laisser déplacer et à obéir à l'impulsion de l'éther; de même que, dans un liquide agité de mouvements divers, des corps flottants allongés ou anguleux, ou recourbés en portions d'hélices, etc., sont mus autrement que des corps sphériques de même masse, et sont plus facilement poussés, ou tournés sur eux-mêmes, dans un sens que dans un autre. On peut donc classer et

caractériser, par ces coefficients ou paramètres, toutes les formes cristallines ou autres, et leurs divers genres de symétrie ou de dissymétrie, comme M. Sarrau les a caractérisés par la périodicité variée qu'il attribue à la densité de leur éther.

De cette manière, bien que M. Boussinesq ait supposé à l'éther à la fois une densité et une élasticité partout et en tous sens les mêmes, ses mélanges avec la matière pondérable peuvent avoir tous les genres d'hétérotropie dynamique existants.

26. Aussi après avoir, au § II de son Mémoire cité, déterminé les formes à donner aux expressions des déplacements des molécules pondérables dans les mélanges isotropes, soit dissymétriques, soit symétriques, il peut en une page, au § III, intitulé : *Dispersion et polarisation rotatoire* (des liqueurs), établir rationnellement, et presque sans calcul, une équation analogue à celle que Cauchy a seulement *posée* (n° 12) en vue de ces phénomènes. Si le milieu est *isotrope symétrique*, c'est-à-dire complétement isotrope, un des termes, celui qui contient un de ces binômes différentiels réciproques représentant (même numéro) une rotation, disparaît; et l'on a pour le carré de la vitesse de propagation des vibrations transversales, une expression dont le second terme, affecté de la densité du milieu pondérable et d'un autre coefficient, relatif à sa nature, l'est aussi de l'inverse du carré du temps de la période des vibrations, ou, ce qui y revient, du carré de la longueur d'onde dans le vide; or c'est la loi expérimentale approchée de la dispersion. Et si le mélange est isotrope dissymétrique, comme doit être une dissolution où sont répartis de petits cristaux tous dextrogires ou tous lévogires, comme le terme rotatoire dont on vient de parler est conservé dans l'équation, la vitesse se trouve déterminée par une équation du second degré dont les deux solutions répondent à deux mouvements circulaires, de sens

opposés et de phases différentes, ce qui fait, conformément à l'expérience, tourner le plan de polarisation d'un angle proportionnel au chemin parcouru, et à l'inverse du carré de la longueur d'onde.

Au § suivant IV, intitulé : *Lois plus exactes*, M. Boussinesq tient compte, dans le développement des déplacements de la matière pondérable, de termes différentiels des déplacements de l'éther, d'un ordre supérieur au second; ce qui n'est nécessaire à considérer que pour la dissolution d'acide tartrique, dont la particularité se trouve expliquée par l'addition d'un seul des nouveaux termes.

27. Au § V, intitulé : *Double réfraction rectiligne*, il passe aux milieux cristallins, en faisant observer qu'au point de vue optique leurs différences de contexture en divers sens sont toujours très-faibles, en sorte qu'on peut les appeler, tous, *presque* isotropes; et aussi que dans tous il y a trois plans rectangulaires par rapport auxquels leur contexture est symétrique ou presque symétrique (1).

Cette double constitution, en prenant les trois plans en question pour ceux des coordonnées, permet d'élaguer toujours, des développements généraux des déplacements u_1, v_1, w_1 des molécules pondérables, un grand nombre de termes excessivement peu influents, en sorte que ces développements ne diffèrent de ceux qu'on a pour un milieu isotrope, légèrement dissymétrique, qu'en ce que les déplacements u, v, w de l'éther non différentiés y ont trois coefficients légèrement inégaux. Les petits termes de dissymétrie ou de rotation peuvent, à une première approxi-

(1) Il démontre dans un article envoyé le 26 décembre 1871, du *Journal de Mathématiques*, que si l'on se borne aux termes principaux des développements de u_1, v_1, w_1, c'est-à-dire à ceux qui produisent la double réfraction rectiligne, tous les cristaux transparents sont optiquement symétriques par rapport à trois certains plans rectangulaires; même ceux des cinquième et sixième systèmes, pour lesquels une telle symétrie n'existe pas au oint de vue cristallographique.

mation, être effacés. On obtient ainsi la double réfraction rectiligne de Fresnel, à cela près que les vibrations lumineuses sont quasi transversales ou inclinées d'un petit angle sur le plan des ondes, et elles sont perpendiculaires aux plans de polarisation comme le veut Fresnel. La vitesse de propagation des rayons ordinaires des cristaux à un axe est toujours, conformément à l'expérience, égale en tous sens, ou la même, quel que soit l'angle de l'onde avec l'axe. L'équation contient des coefficients de dispersion dont la partie principale est la même que pour un mélange dynamiquement isotrope.

Cette partie du Mémoire, *Théorie nouvelle des ondes lumineuses,* que son auteur a été obligé de rendre court, ne contient pas le détail des calculs de la double réfraction ordinaire, parce qu'il revient à un autre Mémoire, purement analytique, présenté sous le titre : *Des ondes dans les milieux isotropes déformés*. Il y étudiait leur propagation au point de vue de l'inégale contexture de la masse éthérée en trois directions, et il démontrait, d'une autre manière que Cauchy, la nécessité de cette persistance, peu probable, comme nous avons dit au n° 14, de l'action de forces déformatrices inégales en trois sens, pour obtenir la perpendicularité, basée par Fresnel sur divers faits, des vibrations aux plans de polarisation. Mais les équations qui donnent ce résultat dans le système de l'inégale élasticité sont obtenues par M. Boussinesq avec des termes de forme toute pareille, dans celui de constante isotropie de l'éther également pressé en tous sens, et de participation de la matière pondérable à ses mouvements vibratoires. Il a ainsi, avec l'onde du 4e degré, des vibrations dirigées comme le pensait Fresnel et comme l'ont pensé M. Sarrau et M. Briot, mais sans avoir besoin de faire une hypothèse ou de poser une condition pour la loi de l'action mutuelle répulsive des molécules éthérées.

28. Pour revenir au Mémoire principal (*Théorie nou-*

velle, etc.), le § VI, intitulé : *Double réfraction elliptique*, ajoute des termes de dissymétrie ou de rotation (n° 12) dans les équations du mouvement des mélanges hétérotropes ou cristallins. Ces termes sont affectés d'un coefficient si petit, qu'on peut le négliger à une première approximation, comme on a dit. En en tenant compte, et en prenant, pour simplifier les calculs, de nouveaux axes, dont deux sont parallèles aux ondes planes excitées, l'équation du second degré, où se trouve engagée la vitesse de propagation, lui fournit deux ondes à vibrations quasi transversales, où les molécules vibrantes décrivent, en deux sens opposés, des ellipses dont les grands axes sont dirigés comme le seraient les vibrations rectilignes, s'il n'y avait aucune dissymétrie.

Le paragraphe suivant est consacré à l'application au quartz. L'auteur montre, par des chiffres, que son analyse donne des résultats s'accordant aussi bien qu'on peut l'espérer, avec les expériences de M. Jamin.

29. Nous ne reviendrons pas sur le sujet du paragraphe suivant et dernier, intitulé : *Conditions à la surface, dites de continuité; réflexion et réfraction.* Nous avons dit suffisamment (n°s 9, 10, 11, 19) que la nécessité statique de pressions égales de part et d'autre de la surface de séparation des deux milieux, ces conditions de Cauchy et de Fresnel, qui sont en harmonie avec les faits, ne pouvaient s'obtenir qu'autant que l'élasticité de l'éther était supposée la même dans l'un des deux milieux que dans l'autre. Ces conditions, qui ont tant et à tant de reprises occupé Cauchy, sans qu'il ait pu être jamais satisfait, vraisemblablement, des négations (n° 9) auxquelles leur établissement le contraignait, s'obtiennent naturellement dans une théorie où l'éther est supposé un milieu unique, partout identique à lui-même, se comportant dans les phénomènes lumineux comme un immense solide homogène et isotrope.

30. Dans l'*addition* au même Mémoire, il s'occupe, § I,

de la puissance réfractive et du pouvoir rotatoire des mélanges de plusieurs corps pondérables transparents. Sa théorie donne, pour cela, des sommes pures et simples des puissances ou pouvoirs des corps composants, la quote-part de chacun étant proportionnelle à sa densité dans le mélange et à un coefficient spécifique. Ce résultat, que l'expérience a fait adopter pour les mélanges de gaz et pour les mélanges des dissolutions, n'est pas évident dans toutes les théories; mais il va de soi, dans la théorie nouvelle, qui attribue à chaque molécule pondérable la même agitation que si les autres n'existaient pas, les forces élastiques mises en jeu entre ces molécules étant négligeables, vu l'extrême petitesse de leurs déplacements comparés à ceux de l'éther.

Le § II de la même addition est un essai sur l'effet du magnétisme pour faire tourner le plan de polarisation dans un corps naturellement isotrope symétrique, soumis à l'action des deux pôles opposés d'un puissant aimant. Les expressions des déplacements de ses molécules en fonction de celles des molécules éthérées ainsi que leurs dérivées par rapport aux seules coordonnées de celles-ci ne donneraient, par leur substitution dans les équations différentielles du mouvement, qu'une extinction de lumière, ou aucun terme compatible avec la transparence, car la dissymétrie acquise latéralement autour de l'axe commun des deux pôles n'empêche pas la symétrie de se conserver par rapport aux plans qui sont normaux. Mais il en est autrement si, ce qui est naturel, et comme on a dit au n° 24, on fait ces mêmes expressions fonctions aussi des vitesses des molécules éthérées, ou des dérivées premières de leurs déplacements par rapport au temps. Ces dérivées nouvelles, dont l'influence serait négligeable dans les autres contextures déjà étudiées, en ont ici une qui est dominante, malgré la petitesse de l'intensité absolue de la force qui en résulte. Et la preuve que telle doit être l'explication du fait observé, c'est qu'elle fournit les quatre premières des cinq lois expérimentales de Faraday et de Verdet, si l'on introduit

dans le calcul, bien entendu et naturellement, la cinquième loi, qu'il ne peut fournir, et qui porte simplement à faire le coefficient de ce qui est dû à l'action magnétique proportionnel à l'intensité de cette action.

Le § III de ce même supplément traite d'un sujet non moins nouveau au point de vue mathématique, celui de la marche des ondes lumineuses dans les corps pondérables animés d'un mouvement rapide de transport. Pour expliquer ce qu'ont appris l'expérience d'Arago et surtout celles de M. Fizeau [1], il n'est point nécessaire d'admettre, comme faisait Fresnel en vue du résultat, que dans les solides et les liquides l'éther se trouve en plus grande quantité sous un même volume que dans l'air ou le vide, et qu'en se transportant dans l'espace ces corps pondérables entraînent justement l'excédant avec eux. La théorie nouvelle n'en a pas besoin : elle introduit, dans l'équation du mouvement vibratoire ou périodique de l'éther, certains termes où les dérivées des déplacements de ses molécules sont affectées de coefficients proportionnels aux carrés et aux produits des trois composantes de la vitesse du transport des molécules pondérables du corps transparent. On en conclut que les ondes planes se propageront, dans ce corps pondérable, comme s'il était en repos et si on lui attribuait une densité égale à sa densité effective, multipliée par le carré de l'excès de l'unité sur le rapport de sa vitesse de transport, dans un sens normal aux ondes, à la vitesse effective de propagation de la lumière. Par suite, si l'on suppose ce rapport très-petit, on a, pour la vitesse de propagation, la formule que Fresnel avait déduite de quelques hypothèses, et que l'expérience a confirmée.

31. Certains phénomènes, qui peuvent être expliqués

---

[1] Sur les hypothèses relatives à l'éther lumineux, et sur une expérience qui paraît démontrer que le mouvement des corps change la vitesse avec laquelle la lumière se propage dans leur intérieur (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 29 septembre 1851, t. XXXIII, p. 349).

dans d'autres théories, le sont non moins bien dans la théorie nouvelle, qui déduit tout d'un principe unique.

On peut le voir, par exemple, au dernier Mémoire de M. Boussinesq : *Etude sur les vibrations rectilignes et sur la diffraction*, considérées, soit dans les milieux isotropes, soit dans l'éther que renferment les cristaux.

Ce Mémoire confirme par une analyse rigoureuse, dans tout ce qu'ils ont d'important, les raisonnements synthétiques et quelquefois contestables, au moyen desquels Fresnel a expliqué la diffraction et la *délimitation* latérale des rayons lumineux, c'est-à-dire leur propagation dans une direction sensiblement unique. Ainsi tombe définitivement l'objection qui a accueilli à sa naissance la théorie de la propagation par ondes : car les vibrations longitudinales, qui donnent le son, ne sont pas susceptibles théoriquement d'une délimitation semblable, et leur diffusion, malgré les obstacles interposés sur leur passage, ne prouve rien quant aux ondes à vibrations transversales fournissant la lumière.

La seule modification à introduire dans les formules de Fresnel, c'est de retrancher 90 degrés, ou un quart de période, aux phases des mouvements, ce qu'on avait reconnu plus conforme à l'expérience, sans l'expliquer.

32. M. Boussinesq n'a pas besoin d'envisager analytiquement, comme ont fait la plupart des autres auteurs, les vibrations de l'éther comme produites par des actions entre molécules, fonctions de leurs distances mutuelles, ni de prendre un parti dans la question controversée du nombre des coefficients constants des équations du mouvement intérieur d'un corps élastique. Il prend simplement pour base de ses calculs les équations différentielles connues de Lamé, à deux coefficients λ et μ, sans considérer ce qu'ils peuvent représenter d'après les forces individuelles en jeu.

Il s'abstient aussi de se prononcer dans la grande et difficile question des ondes à vibrations longitudinales, plus ou moins connexe à celle que nous venons de soulever.

Mais, s'il faut absolument, pour expliquer les quantités de lumière transformées par réflexion et réfraction, etc., avoir un éther inhabile à donner naissance à ces sortes de vibrations et d'ondes, ou qui les éteigne aussitôt produites, je crois que cela sera plus aisément admissible dans une théorie qui, comme la sienne, suppose l'éther partout identique à lui-même pour la force élastique et aussi pour la densité (*voir* ce qui a été dit n°s 14, 15, 19).

33. Les deux hypothèses principales de cette théorie nouvelle me semblent bien près de s'élever à la hauteur de choses démontrées. Ce sont :

1° Cette élasticité constante (entraînant, suivant nous, la densité constante aussi), en tant que nécessaire pour déduire, de l'égalité obligée des pressions exercées de part et d'autre de la séparation de deux milieux, la *continuité de mouvements* que les faits de réflexion et de réfraction révèlent.

2° La participation de la matière pondérable aux vibrations de l'éther, d'une manière sensible, quant aux quantités de mouvement ou d'inertie, et d'une manière concordante, quant aux périodes. En effet, il est bien difficile de concevoir, d'une part, que l'éther puisse être agité au sein d'un corps dont la densité est probablement bien supérieure à la sienne, sans lui communiquer une fraction sensible de sa quantité de mouvement, et, d'autre part, que les ondes ne soient pas bientôt éteintes par cette participation de la matière pondérable au mouvement, s'il n'y a pas concordance entre les oscillations imprimées à chaque molécule de cette matière et celles de l'éther qui l'environne.

34. Mais M. Boussinesq ne se hâte point de faire de pareilles affirmations. Pénétré plus que personne de ce qu'il doit à ses prédécesseurs, bien qu'il ne leur emprunte à peu près rien dans le détail et qu'il bâtisse sur d'autres bases, il ne se permet pas d'ériger ses hypothèses en faits prouvés.

Je pense, au résumé, que sa théorie, qui offre à la fois plus de simplicité, d'unité, de probabilité, et je crois aussi,

de rigueur que les autres (quel que soit le remarquable talent avec lequel ont été présentés ces autres essais, qui ont toujours avancé les questions), mérite d'être enseignée de préférence. J'ose donc proposer à de plus autorisés que moi, aux physiciens, de fixer sur elle sérieusement leur attention. Je serai heureux si mon exposition comparative, que j'ai tâché de rendre claire, peut les aider à la juger et à en apprécier l'esprit; plus heureux encore si leur examen, plus compétent que le mien, peut les conduire, dans l'intérêt d'un enseignement et d'une diffusion scientifique auxquels ils vouent leur savant labeur, à faire passer cette théorie dans leurs leçons et dans leurs livres, et à la présenter, vu qu'elle n'exige pas de longs calculs, d'une manière de plus en plus simple et élémentaire [1], qui amène presque dans le domaine commun la connaissance et la coordination rationnelle de ces admirables lois, à la découverte desquelles les chercheurs français ont pris une si active et si glorieuse part.

---

[1] J'ai eu l'occasion, dans un Mémoire sur le choc longitudinal des barres, de donner, de la formule $\sqrt{\frac{E}{\rho}}$ (E élasticité, ρ densité) de la vitesse du son ou de propagation des vibrations longitudinales dans les tiges métalliques ou les colonnes d'air, une démonstration élémentaire très-simple, mais qui avait été donnée quarante ans auparavant par M. Babinet à ses élèves. En la reproduisant dans une Note intitulée : *Démonstration élémentaire de la formule de propagation d'une intumescence liquide* (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 18 juillet 1870, t. LXXI, p. 186), j'ai fait voir qu'on pouvait démontrer absolument de la même manière la formule $\sqrt{\frac{G}{\rho}}$ de la vitesse de propagation de vibrations transversales dans un milieu isotrope, et, aussi, dans une direction *principale* d'un milieu qu'un mélange rend dynamiquement hétérotrope. Sans doute on pourra, par des procédés analogues, réduire beaucoup la part des calculs transcendants dont l'emploi retarde si souvent la diffusion des vérités scientifiques.

(Extrait des *Annales de Chimie et de Physique*, 4e série, t. XXV, 1872.)

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS,
Quai des Augustins, 55.

Math 5158.72.3
Etude geometrique des systemes
Cabot Science 003334324
3 2044 091 903 799